Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-5 Álgebra Lineal · Primavera 2024

Auxiliar 8

Transformaciones lineales, su núcleo e imagen

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 7 de octubre de 2024

P1. [Transformando linealmente y recuerdos]

Considere la función $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d-a \end{pmatrix}$.

a) Muestre que T es una transformación lineal.

b) Estudie el núcleo y la imagen que define T.

c) Encuentre bases para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ e indique sus respectivas dimensiones.

d) Justifique si $\mathrm{Im}(T)$ y $\mathrm{Ker}(T)$ son suplementarios en $\mathbb{R}^4$.

P2. [Transformando]

Se define $\begin{cases} J\colon & \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \\ & p(x) \mapsto J(p(x)) = x^3 p'''(x) \end{cases}$

a) Muestre que J es una transformación lineal.

b) Calcule el núcleo y la imagen de J y de bases para cada uno.

P3. [Construyendo]

Considere los vectores de $\mathbb{R}^3$ definidos por $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Encuentre una transformación lineal M tal que $M(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, M(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

P4. [Salto]

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal que satisface $L \circ L = L$.

a) Pruebe que $\mathrm{Ker}(L) \cap \mathrm{Im}(L) = \{0\}$.

b) Muestre que $\dim(\mathrm{Ker}(L) + \mathrm{Im}(L)) = n$.

c) Concluya que el núcleo y la imagen de la transformación lineal son suplementarios en el dominio de L.

P5. [Salto doble]

Considere U un espacio vectorial.

a) Sea $J\colon U \to U$ una aplicación lineal biyectiva. Pruebe que la aplicación inversa J^{-1} es lineal y biyectiva.

b) Para $T\colon U \to U$ y $S\colon U \to U$ dos transformaciones lineales, se dice que T es semejante a S si existen isomoformismos J,L tales que $T = J \circ S \circ L$. Pruebe que si T es semejante a S entonces S es semejante a T.

Principales definiciones y propiedades

- **[Transformación lineal]:** Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. La función $T\colon U \to V$ es una transformación lineal si y solo si satisface que:

  i) $(\forall u_1, u_2 \in U) : T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

  ii) $(\forall u \in U)\,(\forall \beta \in \mathbb{K}) : T(\beta u) = \beta T(u)$

  Donde la primera propiedad establece un homomorfismo entre los grupos asociados a cada espacio vectorial. Otra caracterización es $(\forall u_1, u_2 \in U)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) : T(\alpha u_1 + \beta u_2) = T(\alpha u_1) + \beta T(u_2)$. También se satisface que $T(0) = 0$ e imparidad.

- **[Isomorfismo]:** Corresponde a una aplicación lineal que es biyectiva.

- **[Acciones entre aplicaciones lineales]:** La composición entre aplicaciones lineales es lineal; más aún si son biyectivas, la composición también lo será. La inversa de una aplicación lineal es lineal.

- **[Núcleo o kernel]:** Sea la transformación lineal $T\colon U \to V$. Su núcleo corresponde al conjunto definido por $\operatorname{Ker}(T) := \{x \in U \mid T(x) = 0\}$. Es un subespacio vectorial del dominio de la transformación lineal y su dimensión se denomina **nulidad**.

- **[Imagen]**: Sea la transformación lineal $T\colon U \to V$. Su imagen corresponde al conjunto definido por $\operatorname{Im}(T) := \{y \in V \mid (\exists x \in U) : T(x) = y\}$. Es un subespacio vectorial del codominio y su dimensión se llama **rango**.

- **[Teorema Núcleo-Imagen]**: Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con U de dimensión finita, y la transformación lineal $T\colon U \to V$. Entonces se cumple que $\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker}(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$.

- **[Consecuencias de igualdad entre dimensiones]**: Para transformaciones lineales definidas en espacios de igual dimensión, es equivalente ser inyectiva, epiyectiva y biyectiva (isomorfismo).

- **[Consecuencias de desigualdad entre dimensiones]**: Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la dimensión de la partida es mayor que la llegada, no pueden ser inyectivas. Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la llegada es mayor que la partida, no pueden ser epiyectivas.

- **[Herencia en transformaciones lineales]**: Sean V, V' dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con U, W subespacios vectoriales de V, y la transformación lineal $f\colon V \to V'$. Entonces:

  ***)** $f(U)$ es subespacio vectorial de V'.

  ***)** $f(U + W) = f(U) + f(W)$

  ***)** $f(U \oplus W) = f(U) \oplus f(W)$ si f inyectiva.

  ***)** $U \cap W = \{0\} \iff f(U) \cap f(W) = \{0\}$ si f inyectiva.

  ***)** La imagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la partida es finito y linealmente independiente en la llegada siempre que f sea inyectiva.

  ***)** La preimagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la llegada es finito y linealmente independiente en la partida.

- **[Suma de subespacios vectoriales]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces la suma de dichos subespacios vectoriales es otro subespacio vectorial de V, y se define por: $U + W := \{v \in V \mid v = u + w, u \in U \wedge w \in W\}$.

- **[Suma directa]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. $Z = U + W$ es suma directa si y solo si todo vector de $z \in Z$ se escribe de manera única como $z = u + w$ para algún $u \in U, w \in W$. En tal caso se anota $Z = U \oplus W$ y se caracteriza por satisfacer $U + W = Z$ y $U \cap W = \{0\}$. Si $Z = V$ entonces U y W se llaman **suplementarios**.

- **[Dimensión de sumas]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces:

  - $V = U + W \implies \dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
  - $V = U \oplus W \implies \dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$