DESARROLLO AUX 6

BASES DE ESPACIOS VECTORIALES
(Y REPASITO)

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P1

P1 $\quad T = \left\langle \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

$T = \langle \{v_i\}_{i=1}^4 \rangle$

Encontrar una base y la dimensión de T.

⚠ no porque sea subconjunto de $\mathbb{R}^4$ significa que la dimensión de T será 4; hay que estudiar la base y dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores v_i, $i \leq 4$ (que son vectores de $\mathbb{R}^4$).

Idea: Usar la propiedad de que "de un generador de un espacio siempre se pueden extraer vectores tales que sean base" o sea se pueden quitar tales que quede l.i.

$\{v_i\}_{\substack{i\in J \\ |J|<\infty}}$ es l.d. $\Rightarrow \exists\, u \in \{v_i\}_{\substack{i\in J \\ |J|<\infty}}$ t.q. $\langle \{v_i\}_{\substack{i\in J \\ |J|<\infty}} \setminus u \rangle = \langle \{v_i\}_{\substack{i\in J \\ |J|<\infty}} \rangle$

Entonces hay que poner ~~ojo~~ (ojo) a si hay vectores en $\{v_i\}_{i=1}^4$ que sean combinación lineal de ellos.

Notar que:

$$1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + 0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} + 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4}$$

i.e. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es l.d., y se extraerá el que es combinación lineal del resto, es decir, v_4

Queda: $\underbrace{\langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle}_{\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \setminus \{v_4\} \rangle} = \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \rangle = T$

Nuevamente, hay que ver si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i.

Notar que:

$$1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}}_{v_1} + 1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}}_{v_3}$$

i.e. $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.d. y se extraerá el que es combinación lineal del resto, es decir, v_3

Queda: $\underbrace{\langle\{v_1, v_2\}\rangle}_{\langle\{v_1,v_2,v_3\}\setminus\{v_3\}\rangle} = \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle = T$

Hay otra forma de ver si es que es l.d. un conjunto de vectores: si se escalona la matriz cuyas columnas son los vectores y no hay ceros en la diagonal son l.i.; en caso contrario (existe algún cero en la diagonal) son l.d.

En el fondo se quiere ver la def. de l.i.

$\{\beta_i\}_{i\in\mathcal{Y}, |\mathcal{Y}|<\infty} \subseteq \mathbb{K}$, $\{v_i\}_{i\in\mathcal{Y}, |\mathcal{Y}|<\infty} \subseteq V$: $\sum_{i\in\mathcal{Y}, |\mathcal{Y}|<\infty} \beta_i v_i = 0 \Rightarrow \beta_i = 0 \ \forall i\in\mathcal{Y}, |\mathcal{Y}|<\infty$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Se quisiera ver que $\alpha=\beta=\gamma=0$. Si no, es l.d.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 + f_1 \\ f_3 \to f_3 - 2f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

α + extremo es c.l. de los anteriores

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 + 2f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ \\ \\ \end{array}$$

peldaño de largo 2

①: $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

②: $\beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\beta$

conjunto solución

$$\left|\left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}\right| = \infty$$

↳ hay infinitas formas! luego, es l.d. //

Ahora hay que ver que $\langle\{v_1, v_2\}\rangle$ sea l.i.

Se aprovechará el desarrollo de la acotación:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se quisiera ver que $\alpha = \beta = 0$. Si no, es l.d.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 + f_1 \\ f_3 \to f_3 - 2f_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 + 2f_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} ①: \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta \\ ②: \boxed{\beta = 0} \end{array}\right\} ② \rightarrow ① : \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \quad \text{¡Es l.i.!}$$

Luego $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es base de M (pues es l.i. y $\langle\mathcal{B}\rangle = T$).

Como $|\mathcal{B}| = 2 \Rightarrow \dim(T) = 2$. ☒

P_2

P2 $\mathcal{C} = \{2x^2-1, x^2+1, 3\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$W := \langle \mathcal{C} \rangle = \langle \{2x^2-1, x^2+1, 3\} \rangle$

1°) Encontrar subconjunto de $\mathcal{C}$ que sea base de W

Se usará la misma idea del ejercicio anterior:

$W = \langle \mathcal{C} \rangle$ y $\mathcal{C}$ es l.d. $\Rightarrow \exists u \in \mathcal{C}$ t.q. $\langle \mathcal{C} \setminus \{u\} \rangle = \langle \mathcal{C} \rangle (= W)$

i.e. extraer vectores hasta que se haga l.i., pues hasta eso ya que se sabe que genera.

Notar que:

$$\underbrace{2\cdot(x^2+1) + (-1)\cdot 3}_{= 2x^2+2-3 = 2x^2-1} = 2x^2-1$$

$\rightarrow$ o sea $2x^2-1$ es combinación lineal del resto. Entonces se puede remover y genera lo mismo

Así $\langle \mathcal{C} \setminus \{2x^2-1\} \rangle = \langle \mathcal{C} \rangle = W$

Ahora $\mathcal{C} \setminus \{2x^2-1\} = \{x^2+1, 3\}$. Este conjunto es l.i.!

Propuesto: verificarlo por definición. Se puede argumentar que ninguno es múltiplo del otro por los grados de los polinomios; pero lo primero es lo formal.

Luego $\mathcal{B} = \{x^2+1, 3\}$ es base de W (es l.i. y $\langle \mathcal{B} \rangle = W$).

Como $|\mathcal{B}| = 2 \Rightarrow \dim(W) = 2$. ☒

2°) Extender base obtenida a una de $P_2(\mathbb{R})$

De momento sólo se había visto la idea de extraer un elemento dependiente del conjunto del cual se le estudia el s.e.v. generado:

$W=\langle \mathcal{E}\rangle$ y $\mathcal{E}$ es l.d. $\Rightarrow \exists\, u\in\mathcal{E}$ t.q. $\langle \mathcal{E}\setminus\{u\}\rangle = \langle\mathcal{E}\rangle\,(=W)$

Hay otra propiedad en que si se tiene un conjunto l.i. y un vector que no esté en el s.e.v. que genera (i.e. que no es combinación lineal), se puede agregar de modo que quede l.i. (⚠ no necesariamente generan lo mismo)

$\mathcal{E}$ es l.i. y $v\notin\langle\mathcal{E}\rangle \Rightarrow \mathcal{E}\cup\{v\}$ es l.i.

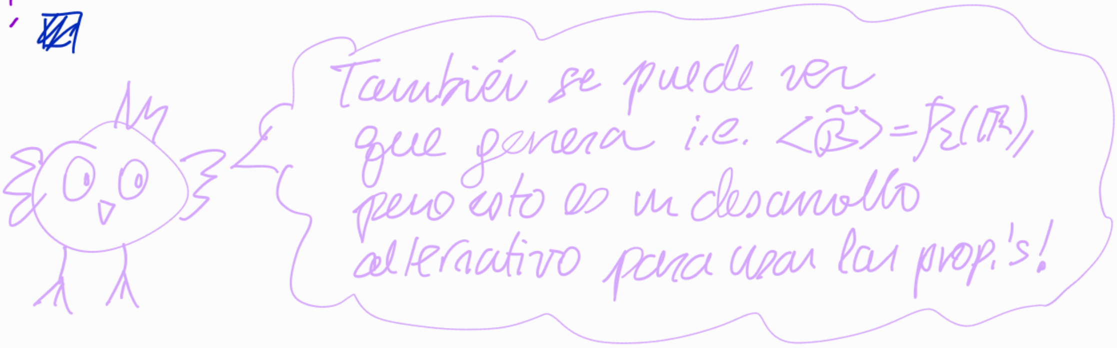
Se usará esta idea para extender una base, teniendo en cuenta que, en general, para $k\in\mathbb{N}$ fijo, $\dim(P_k)=k+1$

Ej: $P_2(\mathbb{R})\equiv$ "polinomios de grado a lo más 2"
$\Rightarrow \mathcal{B}=\{1,x,x^2\}$ es base y $|\mathcal{B}|=3 \Rightarrow \dim(P_2(\mathbb{R}))=3$.

Ya. Con todo lo anterior: Hay que pensar en agregar a $\{x^2+1,3\}=\mathcal{B}$ un elemento que no se pueda generar con sus elementos. Por ejemplo, de un grado que no esté:

$\tilde{\mathcal{B}}=\{x^2+1,3,x\}$ es l.i.

Habría que ver que $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = P_2(\mathbb{R})$ y se podría concluir que es base, pero por <u>propiedad</u>, si es l.i., basta que tenga el cardinal de alguna base. Como $|\tilde{\mathcal{B}}|=3$ y se comentó que $\dim(P_2(\mathbb{R}))=3$, ya que $\tilde{\mathcal{B}}$ es l.i. es suficiente para concluir que es base! $\boxtimes$



P_3

(P3) $v \in \mathbb{R}^n$ fijo. $U = \{M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid Mv = 0\}$
$\uparrow \in \mathbb{R}^n$

(P3) i) P.D.Q. U es $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ - s.e.v.

Definición always ¡ :)!

Hay que ver 3 cosas:

I) $U \neq \emptyset$

En efecto,
basta tomar $M = 0_{n,n} \Rightarrow Mv = 0_n$ i.e. $M \in U$
$\therefore U \neq \emptyset$ //

II) $U \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

En efecto, se tiene por definición //
(Sea $M \in U \Rightarrow M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $Mv = 0$; en particular $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,
o sea que $U \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ //).

III) $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall M, Q \in U): M + \beta Q \in U$ propiedad compacta

$\hookrightarrow M + \beta Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$
$\wedge\ (M + \beta Q)v = 0$

En efecto,
Sean $\beta \in \mathbb{R}$; $M, Q \in U$ arbitrarios.
Como $M, Q \in U$
$\Rightarrow M, Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \Rightarrow \beta Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \Rightarrow M + \beta Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ (*)

$\wedge\ Mv = 0,\ Qv = 0 \Rightarrow \beta Q v = \beta(0) = 0.$

Luego $(M + \beta Q)v \underset{\text{distr.}}{=} Mv + \beta Q v \underset{\text{hipótesis}}{=} 0 + 0 = 0.$ (**)

Por (*) y (**) sigue que $M + \beta Q \in U$ //

Por I), II), III) se concluye que U es $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ - s.e.v. ☒

P3 ii) $n=2,\ v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Encontrar base de U y decir su dimensión.

Importante: Entender el s.e.v.

$$U=\left\{M\in\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\ \middle|\ M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\ \middle|\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\ \middle|\ \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\ \middle|\ a+b=0\wedge c+d=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&-a\\c&-c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\ \middle|\ a,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})\ \middle|\ a,c\in\mathbb{R}\right\}$$

Ahora que se conoce $U|_{\substack{n=2\\v=(1,1)}}$, hay que hallar un conjunto $\mathcal{C}$ t.q. $\mathcal{C}\subseteq U$, $\mathcal{C}$ sea l.i. y $\langle\mathcal{C}\rangle=U$.

Se propone $\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$. Notar que por definición $\langle\mathcal{C}\rangle=U$. Basta ver que sea l.i..

SPOILER: es l.i., pero verifíquenlo! (es lo formal); intuitivamente se deduce por las posiciones de los ceros.

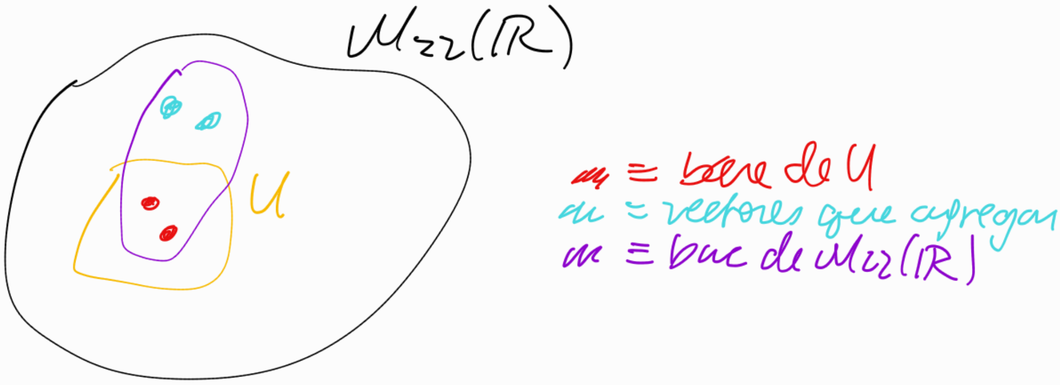
Luego $\mathcal{C}$ es base de U ($\mathcal{C}$ es l.i. y $\langle\mathcal{C}\rangle=U$).

Como $|\mathcal{C}|=2\Rightarrow \dim(U)=2$. ■

P3 iii) Completar base de U a base de $M_{22}(\mathbb{R})$

Idea: U es $M_{22}(\mathbb{R})$-s.e.v.

$M_{22}(\mathbb{R})$ tiene dimensión $2\cdot 2 = 4$, o sea sus bases son de ese tamaño. Como la base de U es de tamaño 2, hay que agregarle 2 $(=4-2)$ elementos, que sean de $M_{22}(\mathbb{R})$ y mantengan la independencia y generación.



(esto es la prop. B es l.i. y $\exists v \notin \langle B \rangle \Rightarrow B \cup \{v\}$ es l.i.)

Intuitivamente, se pueden agregar matrices de 4x4 que tengan 0 donde las otras no (porque entonces nunca se pueden escribir como combinación lineal del resto i.e. no están en el generado).

Esta parte se las dejo propuesta, pues hay varios vectores de $M_{22}(\mathbb{R})$ para elegir, pero deben seguir la idea ya mencionada :)

P_4

(P4) a) V es $\mathbb{K}$-e.v.
$\{u,v,w\} \subseteq V$, $u = 2v - w$
$W := \langle\{u,v,w\}\rangle$

P.D.Q. $\dim(W) < 3$

Idea: Usar que cuando se tiene un generador, se puede extraer una base (como en los ejercicios anteriores).

Se asumirán las hipótesis y se procederá por contradicción.

Supóngase que $\dim(W) \geq 3$.

Notar que u es combinación lineal de v y w, o sea que $\{u,v,w\}$ es l.d.

Por propiedad $\langle\{u,v,w\}\setminus\{u\}\rangle = \langle\{u,v,w\}\rangle$ $(=W)$

Luego $W = \langle\{v,w\}\rangle$. Solo hay 2 casos:

* Si v,w fuesen l.i. $\Rightarrow \{v,w\}$ l.i. y $\langle\{v,w\}\rangle = W$
$\Rightarrow \{v,w\}$ es base ; $|\{v,w\}| = 2$
$\Rightarrow \dim(W) = 2$ (porque se asumió $\dim(W)=3$)

* Si v,w fuesen l.d. $\Rightarrow$ se puede extraer alguno,
s.p.d.g. se extraerá w
$\Rightarrow \langle\{v,w\}\setminus\{w\}\rangle = \langle\{v,w\}\rangle$ $(=W)$
$\Rightarrow \{v\}$ es l.i. (por def.) y $\langle\{v\}\rangle = W$
$\Rightarrow \{v\}$ es base ; $|\{v\}| = 1$
$\Rightarrow \dim(W) = 1$ porque se asumió que $\dim(W)=3$

Luego como se llegó a un absurdo, el supuesto es falso y su negación es verdadera. Sigue que $\dim(W) < 3$. $\boxtimes$

P4 b) Propuesto !! deben razonar de forma similar.

P5

P5) a) $Mx = u$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ y + z + w = 2 \\ x + y + z + w = 3 \\ y + z + \alpha w = \beta \end{cases}$$

Hay que estudiar el sistema y determinar los casos en que no tiene solución, tiene ∞, o tiene !.

La idea es escalonar la matriz, usar teorema que asegura unicidad de solución en matrices cuadradas según ceros en la diagonal, y luego ir por casos.

Se estudiará el sistema aumentado: $(M|u) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 + f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \beta-2 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$ está escalonada

En virtud de que $\overset{\in M_{n\times n}(\mathbb{R})}{M}x = u$ tiene única sol $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \tilde{m}_{ii} \neq 0$ (no hayan ceros en diagonal) ,

entonces:

$Mx = u$ tiene $\boxed{\text{única sol. ssi } \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1}$

Ahora por casos.

al menos una fila debe ser cero $\rightarrow$ compatible

no compatible

Si $\alpha=1 \Rightarrow$ no hay única sol., sino que $\underset{(\infty)}{\exists}$ ó $\underset{(0)}{\nexists}$.

Hay que ver $Mx=u\Big|_{\alpha=1}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

variable libre

"es compatible"

Tiene sentido ssi cada igualdad es verdadera.

En particular, ④ $\Leftrightarrow V$ ssi $0=\beta-2$ ssi $2=\beta$,

En ese caso

③ $:\Rightarrow -z-2w=4 \Rightarrow \boxed{z=-2w-4}$

② $:\Rightarrow y+z+w=2 \Rightarrow y=-z-w+2$

$\Rightarrow y=-(-2w-4)-w+2$

$\Rightarrow y=2w+4-w+2$

$\Rightarrow \boxed{y=w+6}$

① $:\Rightarrow x+2y+3z+4w=1$

$\Rightarrow x=-2(w+6)-3(-2w-4)-4w+1$

$\Rightarrow x=\cancel{-2w}-12\cancel{+6w}+12\cancel{-4w}+1$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$

Notar que ④ no aporta info: $0x+0y+0z+0w=0$

Luego $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x=1,\ y=w+6,\ z=-2w-4,\ w\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix} 1\\ w+6\\ -2w-4\\ w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; w\in\mathbb{R}\right\}=:S$ es el conjunto

solución, y $|S|=\infty$, así que si $\boxed{\alpha=1 \text{ y } \beta=2 \text{ hay } \infty \text{ soluciones.}}$

Ahora, $\boxed{\text{si } \alpha = 1 \text{ y } \beta \neq 2}$, en ese caso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right)\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \to$$

es Falsa: pues $0 = \beta - 2$ sii $\beta = 2$ y se sabe que $\beta \neq 2$,

O sea hay una incompatibilidad, así que $\boxed{\text{no hay soluciones!}}$

— o —

En resumen:

$\alpha \neq 1$

Hay única solución

$\alpha = 1 \wedge \beta = 2$

Hay ∞ soluciones

$\alpha = 1 \wedge \beta \neq 2$

No hay soluciones

☒

(P5) b) Determinar condiciones $\underbrace{}_{\text{sobre } \alpha}$ para las que $M=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&\alpha\end{pmatrix}$

$\mathcal{C}:=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\1\\\alpha\end{pmatrix}\right\}$ forman base de $\mathbb{R}^4$

Idea: La dimensión de $\mathbb{R}^4$ de 4.

$\left(\mathcal{B}=\{e_i\}_{i=1}^4=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\text{ es base de } \mathbb{R}^4 \text{ y } |\mathcal{B}|=4\right)$

entonces como $\mathcal{C}$ ya tiene 4 vectores, se podría ver que fuesen l.i.; en ese caso, directamente es base.

Entonces se quiere ver que

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}4\\1\\1\\\alpha\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

(si no, entonces son l.d.)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&1&1&\alpha&0\end{array}\right)$$

... es el problema que se resolvió! Y lo que basta ver para decir que sean l.i. es que no hayan ceros en la diagonal; ya se estudió que eso ocurre cuando $\alpha\neq 1$.

Así, si $\alpha\neq1 \Rightarrow \mathcal{C}$ es l.i.; como $|\mathcal{C}|=4$ y $\dim(\mathbb{R}^4)=4$, sigue que $\mathcal{C}$ es base de $\mathbb{R}^4$. $\blacksquare$

Yo viendo que el
"lo dejamos para después del 18"
es esta semana :
(o algo así era el meme)

Pero ustedes estarán así  porque hemos
hecho hartos ejercicios en el semestre :)
(aunque el estudio personal es muy importante).

Se aproxima el primer Control.
Una evaluación no l@s definirá :)
Estudien con calma y confíen en sí mism@s.
Éxito en su semana!! Ánimo.

Pueden preguntarme por correo, foro o en persona
en caso de que les aparezcan dudas.

Cançió tranqui