DESARROLLO AUX 3

SISTEMAS LINEALES Y CRITERIOS DE INVERTIBILIDAD

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

Pr

$A, B \in M_{nn}(\mathbb{K})$, A invertible. $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$AX^3 + BX = (AX)^2 + BAX \rightarrow$ ecuación.

Proponer 3 soluciones $X \in M_{nn}(\mathbb{K})$

La idea es hacerlo por "inspección", es decir, reescribir la expresión apropiadamente, e "intuir" cuál X podría satisfacer la igualdad.

Siguiendo la indicación:

$$AX^3 + BX = (AX)^2 + BAX$$

- distributividad
- asociatividad
- def. recursiva de potencia

$$\Leftrightarrow (AX+B)X^2 = (AX+B)AX$$

Recordar que una variable satisface ecuación si al reemplazar en la incógnita, la igualdad es cierta.

Lo anterior ocurre cuando:

- $X = 0 \rightarrow$ está multiplicando en ambos lados
- $X = A \rightarrow$ aparece $(AX+B)$ en ambos lados, que que ya son iguales, y el factor X^2 con AX coinciden solo para $A = X$.
- $X = -A^{-1}B \rightarrow$ viene de querer generar un cero (matriz nula):

$$AX + B = 0 \Leftrightarrow \underbrace{AX = -B}_{-B} \Leftrightarrow \underbrace{X = -A^{-1}B}_{A^{-1}\cdot}$$

este ejercicio motiva a ver que no todos los sistemas de ecuaciones son tan "metódicos" de resolver

* $E_{p,q}(\beta)\cdot A \longrightarrow$ Deja en la fila $A_{q,\cdot}$ a $A_{q,\cdot}+\beta A_{p,q}$

"pivote" t.q. se forme un cero

↳ es lo que se escribe $f_q \to f_q + \beta f_p$

* $I_{p,q}\cdot A \to$ intercambia a las filas $A_{q,\cdot}$ con $A_{\cdot,p} \equiv f_q \rightleftarrows f_p$.

P_2

Para justificar invertibilidad se utiliza el Teorema:

Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

$$A \text{ es invertible} \iff \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$$

↳ asegura que basta estudiar la matriz escalonada y ver que no tenga ceros en la diagonal.

P1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Invertibles? justificar → Se usará Teorema

$\square \equiv$ pivote

$\bigcirc \equiv$ donde queremos formar cero

Primero P

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

para formar pivote

$$\xrightarrow{f_2 \rightleftarrows f_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

→ está escalonada, no tiene ceros en diagonal $\Longleftrightarrow$ es invertible //

Teorema

Ahora M

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 + (-2)f_1 \\ f_3 \to f_3 + (-1)f_1 \\ f_4 \to f_3 + (-2)f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 + (-4)f_2 \\ f_4 \to f_4 + (-7)f_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4 \to f_4 + \left(\frac{-12}{11}\right) f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 23/4 \end{pmatrix}$$

$\beta 12 + 11 = 0$

$\Rightarrow \beta = -\frac{11}{12}$ //

(siempre el amplificado del pivot tiene que ser f_4. Poner el opuesto aditivo del número en la entrada donde se quiere generar un cero)

está escalonada, no tiene ceros en diagonal $\Longleftrightarrow$ es invertible //

Teorema

$\therefore$ A y M son invertibles. ∎

P_3

P3 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R})$

P.D.Q. $Ax=0$ tiene sol. única $\Rightarrow a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c$

Idea: Aplicar caracterización de unicidad de solución en un sistema cuadrado (la matriz escalonada no puede tener ceros en la diagonal).

Se procederá escalonando:

$$Ax=0 \rightarrow [A|0] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - a^2 f_3]{f_2 \to f_2 - a f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{b-a} & c-a & 0 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

para que se forme un cero se debe multiplicar por r t.q. $r(b-a)+b^2-a^2=0$

$\Rightarrow r = \frac{-(b^2-a^2)}{b-a} = -(b+a)$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - (b+a) f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-(c-a)(b+a) & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ está escalonada

Luego $b-a \neq 0 \wedge c^2-a^2-(c-a)(b+a) \neq 0 \Leftrightarrow V$ por la unicidad de la solución y el teorema citado

$\Leftrightarrow b \neq a \wedge (c-a)[(c+a)-(b+a)] \neq 0$

$\Leftrightarrow b \neq a \wedge c-a \neq 0 \wedge c+a \neq b+a$

$\Leftrightarrow b \neq a \wedge c \neq a \wedge c \neq b \Leftrightarrow V$, mostrando así lo pedido. $\blacksquare$

P4

P4

$$\begin{cases} x + 2y + (\alpha-1)z = 0 \\ 2x + (1-\alpha)y + z = \beta \\ (\alpha+1)x - 4y + z = \gamma \end{cases}$$

sistema de ecuaciones para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ parámetros.

Hay que determinar las condiciones sobre dichos parámetros para ver cuándo hay única solución, infinitas, o cuando no admite el sistema.

La idea es apoyarse del Teorema que asegura unicidad de solución en un sistema cuadrado:

$A \in \mathcal{M}_{nn}$: $Ax = b$ $(\forall b \in \mathbb{R}^n)$ tiene sol. única $\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$

diagonal no tenga ningún 0.

Entonces el esquema general es ver cuándo hay única solución (en general se imponen condiciones sobre los parámetros), y luego ir por casos según compatibilidad.

Entonces se procederá identificando cada elemento:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Entonces se quiere resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

matriz aumentada (las columnas identifican los coef. de cada variable, así que se pueden "omitir")

$$\Leftrightarrow Au=b \longrightarrow [A|b] \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & \alpha-1 & 0 \\ 2 & 1-\alpha & 1 & \beta \\ \alpha+1 & -4 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Ahora se va a escalonar. Hay que partir de la esquina superior izquierda (pivote) y generar ceros por debajo en la columna, haciendo operaciones con respecto a la fila fija del pivote

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to f_3 - (\alpha+1)f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & \boxed{-(\alpha+3)} & -2\alpha+3 & \beta \\ 0 & -2(\alpha+3) & -\alpha^2+2 & \gamma \end{array}\right)$$

ojo estas operaciones en particular tienen cierta álgebra por detrás que omití anotar aquí !!

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & -(\alpha+3) & -2\alpha+3 & \beta \\ 0 & 0 & -(\alpha-2)^2 & \gamma-2\beta \end{array}\right)$$

→ está escalonada,

Ahora hay que ver los casos.

Por Teorema, tiene solución única si y solo si

$$-(\alpha+3)\neq 0 \wedge -(\alpha-2)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq -3 \wedge \alpha \neq 2}$$

$\leftrightarrow p \wedge q$ ahora se estudia el caso complementario: $\overline{p} \vee \overline{q}$

Ahora hay que ver qué ocurre si no (en los casos que no hay sol. única, entonces $\underbrace{\text{hay } \infty}_{\text{compatible}}$ o $\underbrace{\text{no hay}}_{\text{incompatible}}$)

* si $\alpha=-3$ | Hay que estudiar el sistema en ese caso

$$[\tilde{A}|\tilde{b}]\Big|_{\alpha=3} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & \beta \\ 0 & 0 & -25 & \gamma-2\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + \frac{25}{9} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2\beta+\frac{25}{9}\beta \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$$= \gamma + \frac{-18\beta+25\beta}{9} = \gamma + \frac{7}{9}\beta$$

Notar que ③ tiene sentido ssi $\gamma + \frac{7}{9}\beta = 0$,

$\iff \gamma = -\frac{7}{9}\beta$

pues de lo contrario la igualdad sería falsa:

$$\underbrace{0x+0y+0z}_{\text{es cero}} = \underbrace{\gamma+\frac{7}{9}\beta}_{\text{distinto de cero}}$$

Aquí el sistema no sería compatible. $\boxed{\alpha=-3 \wedge \gamma+\frac{7}{9}\beta \neq 0}$

En caso de que sí fuese compatible:

③: $0x+0y+0z=0 \to$ no aporta info

②: $9z=\beta \Rightarrow z=\frac{\beta}{9}$ ②'

①: $x+2y-4z=0 \Rightarrow x=-2y+4z$

②' $\Rightarrow x=-2y+\frac{4}{9}\beta$

Luego $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=-2y+\frac{4}{9}\beta \wedge z=\frac{\beta}{9}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} -2y+\frac{4}{9}\beta \\ y \\ \frac{\beta}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y,\beta \in \mathbb{R}\right\} = S_1$ es el conjunto

solución y $|S_1| = \infty$ así que $\boxed{\text{tiene } \infty \text{ soluciones cuando } \alpha=-3 \wedge \gamma+\frac{7}{9}\beta=0}$

* si $\alpha=2$ |

$$[\tilde{A}|\tilde{b}]\Big|_{\alpha=2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -5 & \boxed{-1} & \beta \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \gamma-2\beta \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Nuevamente, ③ es de cuidado:
solo tiene sentido si $\gamma-2\beta=0$, pues en caso contrario la igualdad es Falsa; así el sistema no tiene solución (incompatible) si $\alpha=2 \wedge \gamma-2\beta\neq 0$

Ahora si $\gamma-2\beta=0$:

③: $0x+0y+0z=0 \rightarrow$ no aporta info

②: $-5y-z=\beta \Rightarrow z=-5y-\beta$ ②'

①: $x+2y+z=0 \Rightarrow x=-2y-z$

$$\overset{②'}{\Rightarrow} x=-2y-(-5y-\beta)$$
$$\Rightarrow x=-2y+5y+\beta$$
$$\Rightarrow x=3y+\beta$$

Sigue que $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=3y+\beta \wedge z=-5y-\beta\right\}$

$$=\left\{\begin{pmatrix}3y+\beta\\y\\-5y+\beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, y,\beta\in\mathbb{R}^3\right\}=:S_2$$ es el

conjunto solución, y $|S_2|=\infty$, luego el sistema admite ∞ soluciones si $\alpha=2 \wedge \gamma-2\beta=0$.

En resumen:

$\alpha \neq -3 \wedge \alpha \neq 2$

Hay única solución

$\alpha = -3$

↳ $\gamma + \frac{7}{4}\beta \neq 0$: No hay sol. (incompatible)

↳ $\gamma + \frac{7}{4}\beta = 0$: Hay ∞ sol. (compatible)

$\alpha = 2$

↳ $\gamma - 2\beta \neq 0$: No hay sol. (incompatible)

↳ $\gamma - 2\beta = 0$: Hay ∞ sol. (compatible)

Si $(\alpha, \beta, \gamma) = (4, 5, 7)$: Conviene ir despejando

hasta acá

$$[\tilde{A}|\tilde{b}]\Big|_{(\alpha,\beta,\gamma)=(4,5,7)} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

de aquí

③ $:\Rightarrow -4z = -3 \Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{4}}$ ③'

② $:\Rightarrow -7y - 5z = 5 \underset{③'}{\Rightarrow} -7y - \frac{5}{4}3 = 5 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}\left(5 + \frac{15}{4}\right)$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{7}\left(\frac{35}{4}\right)$

$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{4}}$ ②'

① $:\Rightarrow x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow x + 2\left(\frac{-5}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{10-9}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$

Luego, la solución es $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ ☒

P5

El objetivo de este problema es ver que hay otras formas de ver/entender el resolver un sistema de ecuaciones.

P5) $A \in M_{n\times n}$, $A^2-2A+\alpha I=0$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

P5 a) Determinar condición sobre α para que sea invertible. Calcular A^{-1} → son útiles las igualdades del tipo $AB=I$.

Idea: Aplicar propiedades de operatoria de matrices!

En efecto, como $A^2-2A+\alpha I$

$$\iff A^2-2A=-\alpha I$$
$$\iff A(A-2I)=-\alpha I \quad \alpha\neq 0$$
$$\iff -\frac{1}{\alpha}A(A-2I)=I$$
$$\iff A\left(-\frac{1}{\alpha}\right)(A-2I)=I$$

$\Rightarrow$ Si $A\neq 2I$, $A^{-1}=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)(A-2I)$ //

P5 b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Verificar que cumple las (para $\alpha=-3$) cosas recién vistas: $A^2-2A=3I \wedge A^{-1}=\frac{1}{3}(A-2I)$

El desarrollo queda propuesto como ejercicio de operatoria entre matrices, pero dejaré el resultado de la inversa para que sepan a qué llegar

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1 & -1/2 & 1/2\\ 1/3 & 1/6 & -5/6\end{pmatrix}$$

P5 c) $Ax=b$, $b\in\mathbb{R}^3$. Obtener solución.

Como A es el anterior ya conocido e invertible, la solución es $\xrightarrow[A^{-1}\cdot]{} x=A^{-1}b$ ◼ (se puede explicitar más pero eso se los dejo ☺)

P6

(P6) El objetivo de este ejercicio es aplicar lo aprendido a cosas reales. Por eso es necesario entender el contexto.

Hay ciertos pasos recomendados para determinar un sistema lineal:

0°) Contexto

En la situación dada, se habla de ventas y almacenaje. Desde la perspectiva de la tienda distribuidora:

ventas → ganancias (+)
almacenar → costos (−)

1°) Identificar variables

Lo que interesa estudiar es lámparas, escritorios y sillas.
Entonces $l \equiv$ "# de lámparas"
$e \equiv$ "# de escritorios"
$s \equiv$ "# de sillas"

2°) Identificar restricciones en variables

El enunciado da 3 detalles:

- $b \equiv$ "ganancias de lámparas y almacenamiento de escritorios y sillas"

$$\underbrace{20.000\,l}_{\text{ingresos por c/ lámpara}} \underbrace{- 10.000\,e - 20.000\,s}_{\text{costos de bodega por c/escritorio, silla}} = b$$

- Cuando se venden los 3 productos, sólo se venden exactamente 5:

$$\underbrace{l+e+r}_{\text{cantidades}} = 5$$

- $a \equiv$ "precio unitario asignado a una silla"

$$\underbrace{40.000l}_{\substack{\text{lo que se}\\ \text{vendió en}\\ \text{total}\\ \text{(ingresos)}}} \underbrace{-50.000e-ar}_{\text{costos}} = \underbrace{-100.000}_{\text{el resultado}}$$

pérdida

Entonces se quiere resolver

$$\begin{cases} 20.000l - 10.000e - 20.000r = b \\ l + e + r = 5 \\ 40.000l - 50.000e - ar = -100.000 \end{cases}$$

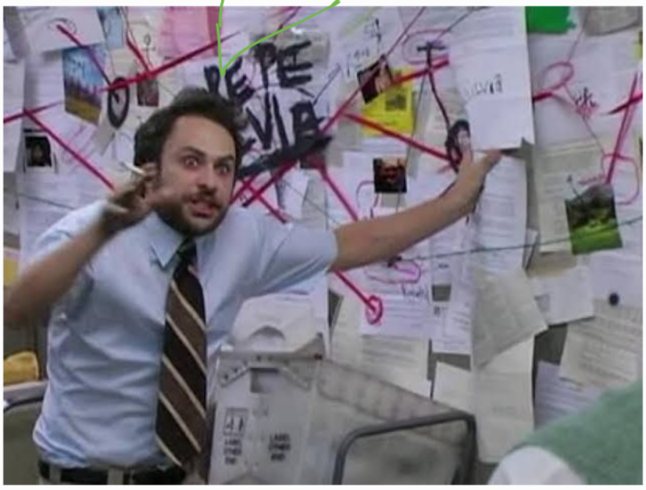
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2l - e - 2r = \beta \\ l + e + r = 5 \\ 4l - 5e - \alpha = -10 \end{cases}, \quad \beta := \frac{b}{10.000}, \quad \alpha := \frac{a}{10.000}$$

útil, para no cargar con tantos ceros ☺

Ahora sí el problema está modelado y se puede resolver como ya se aprendió. Eso quedará propuesto, pero deben llegar a que:

* $\alpha \neq 8 \to \exists!$ sol.
* $\alpha = 8 \wedge \beta = 0 \to \infty$ sol
* $\alpha = 8 \wedge \beta \neq 0 \to \nexists$ sol $\boxtimes$

Si no tiene ceros en la diagonal de la escalonada entonces tiene única solución, en caso contrario es ∞ o no hay soluciones



(grábenselo!! entiéndanlo y argumenten con el Teorema)

La clave para estos problemas con harta operatoria y muchas cosas pasando por todas partes es ir con calma y revisar sus desarrollos; nada los apura; tómense su tiempo ☺

Que tengan buena semana. Ánimo!!

Este álbum completo es buenísimo y muy tranqui para el clima de ahora :)