Auxiliar 3

Sistemas lineales y criterios de invertibilidad

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 26 de agosto de 2024

P1. [Inspeccionar]
Considere las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ con A invertible. Proponga tres soluciones $X \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ de modo que se satisfaga la ecuación $AX^3 + BX^2 = (AX)^2 + BAX$. **Indicación:** Reescriba la igualdad convenientemente.

P2. [¿Invertibles?]
Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Decida si son invertibles, justificando.

P3. [Unicidad]
Considere la matriz a coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Pruebe que si la ecuación $Ax = 0$ tiene única solución, entonces los coeficientes a, b, c no pueden ser iguales entre sí.

P4. [Sistemas lineales]
Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + (\alpha - 1)z = 0 \\ 2x + (1 - \alpha)y + z = \beta \\ (\alpha + 1)x - 4y + z = \gamma \end{cases}$$

Encuentre condiciones sobre α, β, γ de modo que el sistema: **i)** Tenga infinitas soluciones. **ii)** No tenga solución. **iii)** Tenga solución única. Además, encuentre la solución del problema para el caso $(\alpha, \beta, \gamma) = (4, 5, 7)$.

P5. [Invirtiendo]
Sea A una matriz cuadrada que satisface $A^2 - 2A + \alpha I = 0$ para α un parámetro real no nulo. **a)** Determine la condición que debe satisfacer α para que sea invertible, y calcule A^{-1}. **b)** Compruebe que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ cumple la condición del problema con $\alpha = -3$. **c)** Obtenga la solución del sistema $Ax = b$, con $b^T = (b_1, b_2, b_3)$.

P6. [Sistemas lineales en acción]
Hay una tienda que distribuye tres productos diferentes: lámparas, escritorios y sillas. Dicha tienda te ha elegido para que estudies su logística y determines la cantidad de cada producto que se debe pedir para satisfacer la demanda de los clientes, manteniendo un equilibrio entre la ganancia por unidad y los costos de almacenamiento. Para esto, te indican los siguientes detalles:

- La relación entre ganancias de lámparas y almacenamiento de escritorios y sillas está dado por un parámetro b. En el caso de que el precio por usar las bodegas para los escritorios y sillas sean 10,000 y 20,000 pesos, y que el precio unitario de las lámparas fuese 20,000 pesos, entonces los ingresos por concepto de lámparas junto a los gastos de almacenamiento de escritorios y sillas tienen que ser dicho parámetro.

- En caso de vender los tres tipos de productos, estos deben ser exactamente cinco.
- Si el parámetro a corresponde al precio unitario asignado a una silla, las lámparas se venden en 40,000 pesos y el costo de envío de escritorios es 50,000 pesos, se espera que haya una pérdida de 100,000 pesos.

a) Plantee el problema del enunciado en su forma matricial. **b)** Determine condiciones sobre los parámetros a y b de modo que el sistema: **i)** No tenga solución. **ii)** Tenga infinitas soluciones. **iii)** Tenga solución única. Comente si existen valores de estos parámetros que hagan que la matriz asociada al sistema sea invertible.

Principales definiciones y propiedades

- **[Matriz elemental de permutación]:** Para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $p, q \leq n$ se define la matriz $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ como la matriz identidad de $n \times n$ luego de que se le permutaran las filas p y q. Por esto I_{pq} solo tiene entradas uno en la diagonal, salvo por las filas p y q: el 1 de la fila p está en la columna q, y el 1 de la fila q está en la columna p.

  I_{pq} es invertible y $(I_{pq})^{-1} = I_{pq}$.

  Con lo anterior, para A, B matrices con dimensiones para que el producto esté bien definido: $I_{pq}A$ resulta en la matriz A con las filas p y q permutadas, y BI_{pq} resulta en la matriz B con las columnas p y q permutadas.

- **[Matriz elemental de suma]:** Para $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ fijos, y $p, q \leq n$ tal que $p < q$, se define la matriz $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz identidad de $n \times n$ de entrada λ en la posición (q, p).

  $E_{pq}(\lambda)$ es invertible y $(E_{pq}(\lambda))^{-1} = E_{pq}(-\lambda)$.

  Con lo anterior, para A, B matrices con dimensiones para que el producto esté bien definido: $E_{pq}(\lambda)A$ resulta en la matriz A tal que a la fila q se le sumó la fila p ponderada por λ, y $BE_{pq}(\lambda)$ resulta en la matriz B tal que a la columna p se le sumó la columna q ponderada por λ.

- Un sistema con m ecuaciones y n incógnitas se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

  En cuanto a sus dimensiones (dim) y cantidad de soluciones (#soluciones) en caso de que sea homogéneo (S.H.) o no (S.N.H.), se cumple que:

	S.H. $(b = 0)$		S.N.H. $(b \neq 0)$	
dim	$n \leq m$	$n > m$	$n \leq m$	$n > m$
#sol	1 o ∞	∞	0, 1 o ∞	0 o ∞

- **[Matriz escalonada]:** Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, la matriz escalonada asociada a la matriz A se define por $\tilde{A}$ y es tal que en cada columna existe un índice que barre por las filas tal que, a partir de dicho índice, solo hay ceros como entradas en la columna (o bien, que antes de dicho índice, hay entradas no nulas en la columna); este índice va aumentado en la medida que se barre por las columnas. Esto provoca se visualice una forma de "escalones" en la matriz. Esta matriz $\tilde{A}$ se obtiene mediante la premultiplicación de A por matrices elementales (de suma o de permutación de filas): $\tilde{A} = \left(\prod_j Q_j\right) A$. Las entradas de cada columna en tales que arriba las entradas son no nulas y abajo son nulas se llaman **pivotes**.

- **[Sistemas equivalentes]:** Dada una matriz C invertible, entonces: $a \in \mathbb{K}^n$es solución de$Ax = b \iff a$es solución de $(CA)x = Cb$. Esto permite concluir que los sistemas $Ax = b$ y $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

- **[Teorema que caracteriza unicidad e invertibilidad de un sistema matricial cuadrado]:** Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Entonces las siguientes son equivalentes:

  - A es invertible
  - $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \in \mathbb{K}^n$
  - $\prod_{i=0}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$