Auxiliar 6

Bases de espacios vectoriales (y repasito)

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 23 de septiembre de 2024

P1. [Encontrar una base]
Se tiene el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$T = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Encuentre una base y la dimensión de T.

P2. [Extender una base]
Considere $\mathcal{C} = \{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Sea W el subespacio generado por $\mathcal{C}$, es decir, $\langle\{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\}\rangle$. Encuentre un subconjunto de $\mathcal{C}$ que sea base de W, y extienda dicha base de W a una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

P3. [Completar una base]
Considere $U := \{M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid Mv = 0\}$ para $v \in \mathbb{R}^n$ dado. **i)** Pruebe que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. **ii)** Para el caso $n = 2$ y $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, encuentre una base de U e indique la dimensión de dicho espacio vectorial. **iii)** Complete la base obtenida en la parte anterior a una de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

P4. [Generando ando]

a) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y considere u, v, w vectores en V tales que $u = 2v - w$. Se denomina W al subespacio vectorial generado por esos vectores, vale decir, $W = \langle\{u, v, w\}\rangle$. Demuestre que $\dim(W) < 3$.

b) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y considere u, v vectores diferentes en V. Se denomina W al subespacio vectorial generado por los vectores $u, u - v, u + v$, vale decir, $W = \langle\{u, u - v, u + v\}\rangle$. Muestre que $1 \leq \dim(W) \leq 2$.

P5. [El pasado y el presente]
Considere el sistema lineal $Mx = u$, con $M \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R})$, $x, u \in \mathbb{R}^4$, definido por:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ y + z + w = 2 \\ x + y + z + w = 3 \\ y + z + \alpha w = \beta \end{cases}$$

a) Determine condiciones sobre los parámetros reales α, β de forma que: **i)** El sistema no admita solución. **ii)** El sistema tenga infinitas soluciones; explicite el conjunto solución. **iii)** El sistema tenga única solución. **b)** Indique las condiciones que debe cumplir α para que las columnas de la matriz M formen una base de $\mathbb{R}^4$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Caracterización de espacio vectorial]:** Sean $(V, +_V)$ un grupo abeliano, $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un cuerpo, $*_V : \mathbb{K} \times V \to V$ ley de composición externa tal que $(\forall\,(\beta, v) \in \mathbb{K} \times V) : \beta * v \in V$. Luego $(V, +_V, *_V)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (también dicho $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si y solo si $(\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{K})\,(\forall\,u, v \in V)$ se cumple que:
  - **i)** $(a +_{\mathbb{K}} \beta) *_V v = \alpha *_V v \ +_V \ \beta *_V v$
  - **ii)** $\alpha *_V (u +_V v) = \alpha *_V u \ +_V \ \alpha *_V v$
  - **iii)** $\alpha *_V (\beta *_V V) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) *_V v$
  - **iv)** $1_{\mathbb{K} \cdot_{\mathbb{K}}} *_V v = v$
- **[Subespacio vectorial]:** Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que U es subespacio vectorial de V si y solo si se cumple:
  - **i)** $U \neq \emptyset$
  - **ii)** $U \subset V$
  - **iii)** $(\forall u, v \in U) : u + v \in U$
  - **iv)** $(\forall \beta \in \mathbb{K})\,(\forall u \in U) : \beta u \in U$
- **[Intersección de subespacios vectoriales]:** Sea E un espacio vectorial definido sobre algún cuerpo. Sean U, V subespacios vectoriales de E, entonces $U \cap V$ es subespacio vectorial de E.
- **[Caracterización de subespacios vectoriales]:** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces U es subespacio vectorial de V si y solo si $(\forall u, v \in U)\,(\forall \beta \in \mathbb{K}) : u + \beta v \in U$.
- **[Combinación lineal]:** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ una colección de vectores y $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ una colección de escalares. El vector $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$ se denomina combinación lineal.
- **[Ser combinación lineal]:** Un vector $u \in V$ se dice combinación lineal de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ si y solo si existen $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tales que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$.
- **[Subespacio vectorial generado por un conjunto]:** El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, también denominado el conjunto generado por dichos vectores, se define por:

$$\langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i, \beta_i \in \mathbb{K} \right\}$$

  - $\langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle$ es el subespacio vectorial de V más pequeño que contiene a los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$.
- **[Independencia lineal]**: Sean $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$. Los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ son **linealmente independientes** si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0 \implies \beta_i = 0, \forall i \in [1..n]$. De lo contrario, se dirán **linealmente dependientes**.
- **[Conjunto generador]**: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ generan V si y solo si $\langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle = V$, es decir, $(\forall v \in V)\,(\exists \{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}) : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$.
- **[Base]**: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. El conjunto de vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ se dice base de V si y solo si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto linealmente independiente y genera a todo el espacio $V = \langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle$.
- **[Dimensión]**: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $n \in \mathbb{N}$. Su dimensión es n (finita) ssi admite una base de cardinalidad n; en caso de que no exista una base finita, se dirá que tiene dimensión infinita. Si U es s.e.v. de V entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$. Si $\dim(U) = \dim(V)$ entonces $U = V$.
- **[Convención]**: El conjunto vacío es linealmente independiente y $\{0\}$ es el subespacio más pequeño que lo contiene, por lo que el conjunto vacío es la base del espacio vectorial $\{0\}$. Se tiene que $\dim(\{0\}) = 0$.
- **[Obtener bases]**: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
  - De un conjunto generador de V, siempre es posible extraer un subcojunto que sea base de V.
  - Si se tiene una base de tamaño n y conjunto cualquiera de tamaño k tal que $k > n$, entonces el conjunto es linealmente dependiente (pueden extraerse vectores hasta obtener una base de V).
  - Si la dimensión de V es $n < \infty$ y se tiene un conjunto linealmente independiente de n elementos, entonces dicho conjunto es base de V.
  - Si la dimensión de V es $n < \infty$ y se tiene un conjunto linealmente independiente de k elementos con $k < n$, entonces existen $n - k$ vectores que agregar al l.i. para que sea base de V.