DESARROLLO AUX 5

SUBESPACIOS VECTORIALES, INDEPENDENCIA LINEAL Y GENERADORES

MA1102-5

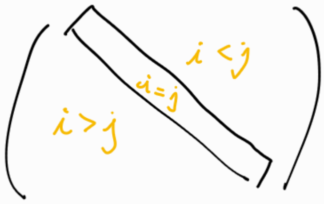
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

La idea es proceder por definición!

(P1) a) $\mathcal{H} = \{ H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid h_{ij} = 0 \quad \forall i > j+1 \}$



P.D.Q. $\mathcal{H}$ es s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{H} \neq \emptyset \\ \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \\ (\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall P, Q \in \mathcal{H}): P + \beta Q \in \mathcal{H} \end{cases}$$

i) $\mathcal{H} \neq \emptyset$

En efecto,

la matriz nula $\underbrace{}_{\text{de } n\times n}$ tiene sus componentes nulas, en particular las exigidas por $\mathcal{H}$. Luego $0_{n,n} \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H} \neq \emptyset$.

ii) $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

Se tiene directo por def. de $\mathcal{H}$

(Sea $P \in \mathcal{H}$. Entonces $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$: $p_{ij} = 0 \ \forall i > j+1$.
En particular $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Así $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ //)

iii) $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall P, Q \in \mathcal{H}): P + \beta Q \in \mathcal{H}$

En efecto,

Sean $\beta \in \mathbb{R}$; $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ arbitrarios.

Luego $p_{ij} = 0 = q_{ij} \ \forall i > j+1 \Rightarrow (P + \beta Q)_{ij} = 0 \ \forall i > j+1$

Así $P + \beta Q \in \mathcal{H}$ //

Por i), ii), iii) en virtud de def. s.e.v., $\mathcal{H}$ es s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ☐

(P1) b) $U := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \;\middle|\; M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$

P.D.Q. U es s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U \neq \emptyset \\ U \subseteq \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \\ (\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall P, Q \in U): P + \beta Q \in U \end{cases}$$

Una buena idea sería caracterizar los vectores del conjunto, usando la prop. que cumplen.

Sea $M \in U \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, algún $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a = a+c}_{\Leftrightarrow c = 0} \wedge \underbrace{a+b = b+d}_{\Leftrightarrow a = d} \wedge c = c \wedge \underbrace{c+d = d}_{\Leftrightarrow c = 0}$$

Luego $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ es t.q. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Así, $U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \;\middle|\; c = 0,\ a = d \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \right\} //$$

i) $U \neq \emptyset$

En efecto,

Por la caracterización ya estudiada,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \in U \Rightarrow U \neq \emptyset. //$$

ii) $U \subseteq \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$

En efecto,

Es directo por la def. de U. //

(Sea $M \in U \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, algún $a, b \in \mathbb{R}$.
En particular, $M \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, luego $U \subseteq \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ //)

iii) $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall P, Q \in U): P + \beta Q \in U$

En efecto,

Sean $\beta \in \mathbb{R}$; $P, Q \in U$ arbitrarios.

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}, \text{ algún } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P + \beta Q = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta c & \beta d \\ 0 & \beta c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \beta c & b + \beta d \\ 0 & a + \beta c \end{pmatrix}$$

que tiene la estructura de las matrices de U.

Sigue que $P + \beta Q \in U$. //

$\tilde{a} := a + \beta c \in \mathbb{R}$
$\tilde{b} := b + \beta d \in \mathbb{R}$

Por i), ii), iii) en virtud de def. s.e.v., U es s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ $\blacksquare$

$\textcircled{P_1}$ c) $P_4[x] \equiv$ " polinomios de grado a lo más 4 "

$$= \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; p(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i ,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

podrían ser cero

$$W = \left\{ q(x) \in P_4[x] \;\middle|\; q(x) = \beta + 2\gamma x + 3\beta x^2 + 2\gamma x^3 + \beta x^4 ,\ \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

P.D.Q. W es s.e.v. de $P_4[x]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} W \neq \emptyset \\ W \subseteq P_4[x] \\ (\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall P, Q \in W): P + \beta Q \in W \end{cases}$$

i) $W \neq \emptyset$

En efecto,

Notar que $q(x) = 7 + 2\cdot 9x + 3\cdot 7x^2 + 2\cdot 9x^3 + 7x^4 \in W$

pues cumple con la estructura de W. Luego $W \neq \emptyset$.//

ii) $W \subseteq P_4[x]$

En efecto,

Se tiene directamente por def. de W.

(Sea $q(x) \in W \Rightarrow q(x) \in P_4[x]$ t.q. coeficientes de $q(x)$ tienen cierta estructura. En particular, $q(x) \in P_4[x] \Rightarrow W \subseteq P_4[x]$)

iii) $(\forall \mu \in \mathbb{R})(\forall\, p, q \in W): p + \mu q \in W$

En efecto,

Sean $\mu \in \mathbb{R}$; $p, q \in W$ arbitrarios.

$$\Rightarrow \begin{cases} p = p(x) = \beta + 2\gamma x + 3\beta x^2 + 2\gamma x^3 + \beta x^4, \text{ algún } \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ q = q(x) = \eta + 2\nu x + 3\eta x^2 + 2\nu x^3 + \eta x^4, \text{ algún } \eta, \nu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu q(x) = \mu\eta + \mu(2\nu)x + \mu(3\eta)x^2 + \mu(2\nu)x^3 + \mu\eta x^4$$

$$\Rightarrow p(x) + \mu q(x)$$

$$= (\beta + \mu\eta) + 2(\gamma + \mu\nu)x + 3(\beta + \mu\eta)x^2 + 2(\gamma + \mu\nu)x^3 + (\beta + \mu\eta)$$

que justamente tiene la estructura de los objetos de W

(llamar $\tilde{\beta} := \beta + \mu\eta \in \mathbb{R}$, $\tilde{\gamma} := \gamma + \mu\nu \in \mathbb{R}$).

Así $p + \beta q \in W$ //

Por i), ii), iii) en virtud de def. s.e.v., W es s.e.v. de $P_4[x]$ ∎

P_2

(P2) a) $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(u \neq v \neq w)$

$U := \{u, v, w\}$, $V := \{u+v,\ u-v,\ u-2v+w\}$

P.D.Q. U es l.i. ssi V es l.i.

Proceder por definición y doble implicancia.

En efecto,

Por doble implicancia:

$\Rightarrow$) U l.i. $\Rightarrow$ V l.i.

Se asume U l.i.

P.D.Q. V es l.i.

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i v_i = 0 \Rightarrow \underset{(\forall i)}{a_i = 0} \quad / \quad v_i \in V,\ a_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \mathbb{R}$$

Se asumirá $\alpha(u+v) + \beta(u-v) + \gamma(u-2v+w) = 0$

Se quiere ver $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Desarrollando:

$$\alpha u + \alpha v + \beta u - \beta v + \gamma u - 2\gamma v + \gamma w = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) u + (\alpha - \beta - 2\gamma) v + \gamma w = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \wedge \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \wedge \boxed{\gamma = 0}$$

usando la hipótesis

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \wedge \alpha - \beta = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

Sigue que V es l.i. //

$\Leftarrow]$ V es l.i. $\Rightarrow$ U es l.i.

Se asumirá V l.i.

P.D.Q. U es l.i.

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i u_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \ (\forall i), \quad a_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \mathbb{R}, \ u_i \in U$$

Se asumirá $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

Hay que ver que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

La idea es encontrar la combinación lineal adecuada, a sabiendas de que V es l.i. es decir

$$\mu(u+v) + \eta(u-v) + \varphi(u-2v+w) = 0 \Rightarrow \mu = \eta = \varphi = 0$$

O sea: $\alpha u + \beta v + \gamma w \overset{!}{=} \mu_1(u+v) + \mu_2(u-v) + \mu_3(u-2v+w)$

$$\Leftrightarrow \alpha u + \beta v + \gamma w = (\mu_1+\mu_2+\mu_3)u + (\mu_1-\mu_2-2\mu_3)v + \mu_3 w$$

$$\Rightarrow \alpha = \mu_1+\mu_2+\mu_3 \wedge \beta = \mu_1-\mu_2-2\mu_3 \wedge \gamma = \mu_3$$

$$\Rightarrow \alpha = \mu_1+\mu_2+\gamma \wedge \beta = \mu_1-\mu_2-2\gamma$$

$$\Rightarrow \alpha-\gamma = \mu_1+\mu_2 \wedge \beta+2\gamma = \mu_1-\mu_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \mu_1} \wedge \boxed{\mu_2 = \frac{\alpha-\beta-3\gamma}{2}}$$

Usando esta construcción,

$$\alpha u + \beta v + \gamma w \overset{!}{=} \mu_1(u+v) + \mu_2(u-v) + \mu_3(u-2v+w)$$

Así, si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)(u+v) + \left(\frac{\alpha-\beta-3\gamma}{2}\right)(u-v) + \gamma(u-2v+w) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0 \wedge \frac{\alpha-\beta-3\gamma}{2} = 0 \wedge \boxed{\gamma = 0}$$

V es l.i.

$$\Longrightarrow \alpha+\beta = 0 \wedge \alpha-\beta = 0$$

$$\Longrightarrow 2\alpha = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 0} \Longrightarrow \boxed{\beta = 0}$$

Luego, como $\alpha = \beta = \gamma = 0$, sigue que U es l.i. //

—o—

Por lo anterior, queda demostrado que

U es l.i. $\Longleftrightarrow$ V es l.i. ∎

P2 b) $P_n[x] := \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} a_i x^i ,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$

$p, q \in P_n[x]$, $\{p, q\}$.

P.D.Q. $\{p, q, pq\}$ l.i. ssi $\text{grado}(p) \geq 1 \wedge \text{grado}(q) \geq 1$

Proceder por definición y doble implicancia. Como no es tan evidente el rol del grado conviene ver qué pasaría si no se cumpliera (contradicción).

$\Rightarrow)$ $\{p, q, pq\}$ es l.i. $\Rightarrow \text{grado}(p) \geq 1 \wedge \text{grado}(q) \geq 1$

Se asumirá $\{p, q, pq\}$ l.i.

P.D.Q. $\text{grado}(p) \geq 1 \wedge \text{grado}(q) \geq 1$

Por contradicción,

supóngase $\underbrace{\text{grado}(p) < 1 \Rightarrow \text{grado}(p) = 0}$.

$\Rightarrow p(x) \equiv c \quad (c \in \mathbb{R})$ polinomios de grado cero son constantes

Luego $pq = cq$, así $\{p, q, pq\} = \{p, q, cq\}$

pero $cq = 0 \cdot p + c \cdot q$, luego cq es combinación lineal del resto y eso contradice que $\{p, q, pq\}$ es l.i.

Como se llegó a un absurdo y se procedió por contradicción, el supuesto es falso y su negación es verdadera, luego $\text{grado}(p) \geq 1 \wedge \text{grado}(q) \geq 1$, mostrando así lo pedido. //

$\Leftarrow$ | $\text{grado}(p)\geq 1 \wedge \text{grado}(q)\geq 1 \Rightarrow \{p, q, pq\}$ es l.i.

Se asumirá $\text{grado}(p)\geq 1 \wedge \text{grado}(q)\geq 1$.

P.D.Q. $\{p, q, pq\}$ es l.i.

Por contradicción,

Supóngase que $\{p, q, pq\}$ no es l.i. (es l.d.).

Entonces $(\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$: $\alpha p + \beta q + \gamma pq = 0$

con α, β, γ no todos nulos.

En particular si $\gamma \neq 0$

$$\Rightarrow pq = \frac{1}{\gamma}(-\alpha p + \beta q)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{grado}(pq)}_{=\text{grado}(p)+\text{grado}(q)} = \max(\{\text{grado}(p), \text{grado}(q)\})$$

pues $\text{grado}(p)\geq 1$
$\text{grado}(q)\geq 1$

Como se llegó a un absurdo y se procedió por contradicción, el supuesto es falso y su negación es verdadera, luego $\{p, q, pq\}$ tiene que ser l.i., mostrando así lo pedido. //

—o—

Por lo anterior, queda demostrado que:

$$\{p, q, pq\} \text{ l.i. ssi } \text{grado}(p)\geq 1 \wedge \text{grado}(q)\geq 1$$

$\blacksquare$

(P2) c) V e.v., $n \in \mathbb{N}$ fijo

(P2) c) i) $\{v_i\}_{i=1}^{n} \subseteq V$ conjunto de vectores l.d.

P.D.Q. $\{v_i\}_{i=1}^{n} \cup \{v\}$ es l.d. $(\forall v \in V)$

La idea será garantizarlo viendo combinaciones lineales

En efecto,

Sea $v \in V$ arbitrario.

Hay dos opciones:

(1) v no es combinación lineal de $\{v_i\}_{i=1}^{n}$

(2) v es combinación lineal de $\{v_i\}_{i=1}^{n}$

(1) | Como $\{v_i\}_{i=1}^{n} \subseteq V$ es l.d.

$\Rightarrow \left(\exists \{\beta_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R} \text{ no todos nulos}\right): \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$ (*)

Si no existen $\{\alpha_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}$, $|J| < \infty$ t.q. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j v_j$

v no es combinación lineal de $\{v_i\}_{i=1}^{n}$

se puede agregar el vector v sumando 0:

(*) $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i + 0 \cdot v_i = 0 \cdot v_i$, β_i no todos nulos

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0 \Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^{n}$ es l.d. //

β_i no todos nulos

① Como $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es l.d.

$$\iff \left(\exists \{\beta_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R} \text{ no todos nulos}\right) : \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$$

y como v es combinación lineal de dichos vectores:

$\left(\exists \{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}\right) : v = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i v_i$. Ahora se va a estudiar la combinación lineal de $\{v_i\}_{i=1}^{n} \cup \{v\}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) + \beta_{n+1} v \ , \quad \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$$

se tiene control sobre su valor porque ya se sabe que $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}$ son no todos nulos.

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i + \beta_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i v$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \beta_{n+1} \tilde{\beta}_i) v_i = 0 \text{ si } \beta_i + \beta_{n+1} \tilde{\beta}_i = 0 \quad \forall i \leq n$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_{n+1} = -1} \Rightarrow \beta_i = \tilde{\beta}_i$$

Luego, hay una combinación lineal, con escalares no todos nulos, que suma cero.

$$\therefore \{v_i\}_{i=1}^{n} \cup \{v\} \text{ es l.d.}$$

P2) c)ii) V e.v., $n \in \mathbb{N}$ fijo

$\{v_i\}_{i=1}^{n} \subseteq V$ conjunto de vectores l.i.

P.D.Q. $\{v_i\}_{i=1}^{n} \setminus \{v_k\}$ es l.i. $(\forall k \in [1..n])$

Sea $\{v_i\}_{i=1}^{n} \subseteq V$ l.i.

P.D.Q. $\{v_i\}_{i=1}^{n} \setminus \{v_k\}$ es l.i. $\forall k \in [1..n]$

Por contradicción,

Supóngase que $\{v_i\}_{i=1}^{n} \setminus \{v_k\}$ no es l.i. (es l.d.)

$\Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^{n} \setminus \{v_k\} \cup \{v_k\}$ es l.d.

parte i)

$(A \setminus B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = (A \cup B) \cap X = (A \cup B)$

$\Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^{n} \cup \{v_k\}$ es l.d.

$\Leftrightarrow \{v_i\}_{i=1}^{n}$ es l.d.

pues $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es l.i.

Como se llegó a un absurdo y se procedió por contradicción, el supuesto es falso y su negación es verdadera, luego $\{v_i\}_{i=1}^{n} \setminus \{v_k\}$ tiene que ser l.i. $\forall k \in [1..n]$, mostrando así lo pedido. ▨

P3

(P_3) a) $P_3[x] := \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i ,\ a_i \in \mathbb{R} \}$

$q_1, q_2, q_3 \in P_3[x]$:

* $q_1(x) = 1 + 6x^2$
* $q_2(x) = 4x$
* $q_3(x) = 1 + 3x + 5x^2$

igualdad de conjuntos
↳ doble inclusión
+ def's de lineal

P.D.Q. $P_2[x] = \langle \{ q_1, q_2, q_3 \} \rangle$

En efecto,
Por doble inclusión

$\underline{2)}$ $\langle \{ q_1, q_2, q_3 \} \rangle \subseteq P_3[x]$

Sea $q \in \langle \{ q_1, q_2, q_3 \} \rangle$ conjunto de las combinaciones lineales.

$\Rightarrow q = \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3$, algún $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow q = \alpha(1+6x^2) + \beta(4x) + \gamma(1+3x+5x^2)$

$= \alpha + 6\alpha x^2 + 4\beta x + \gamma + 3\gamma x + 5\gamma x^2$

$= (\alpha + \gamma) + (4\beta + 3\gamma)x + (6\alpha + 5\gamma)x^2$

$=: \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} x + \tilde{\gamma} x^2$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ grado $(q) \leq 2$

$\Rightarrow q \in P_2[x]$

$\Rightarrow \langle \{ q_1, q_2, q_3 \} \rangle \subseteq P_2[x]$ //

$\subseteq$ | $P_2[x] \subseteq \langle \{q_1, q_2, q_3\} \rangle$

Sea $q \in P_2[x]$

$$\Rightarrow q = a + bx + cx^2, \text{ algún } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

P.D.Q. $q = \alpha(1+6x^2) + \beta(4x) + \gamma(1+3x+5x^2)$,

(con α, β, γ explícitos.)

Tomando $\begin{cases} a = \alpha + \gamma \\ b = 4\beta + 3\gamma \\ c = 6\alpha + 5\gamma \end{cases}$

es "directo" de ver porque son las constantes encontradas en la parte anterior.

$$\Rightarrow q = (\alpha+\gamma) + (4\beta+3\gamma)x + (6\alpha+5\gamma)x^2$$

$$= \alpha(1+6x^2) + \beta(4x) + \gamma(1+3x+5x^2)$$

$$\Rightarrow q \in \langle \{q_1, q_2, q_3\} \rangle$$

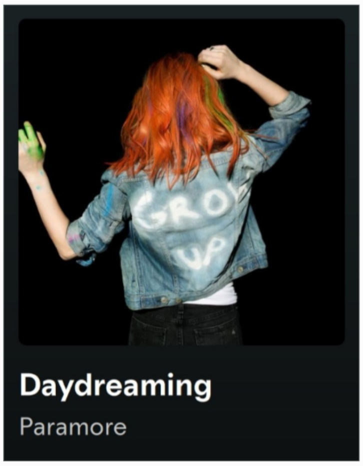
$$\Rightarrow P_2[x] \subseteq \langle \{q_1, q_2, q_3\} \rangle.$$

— o —

Por lo anterior, se concluye: $P_2[x] = \langle \{q_1, q_2, q_3\} \rangle$ ■

Casi 1/3 del semestre! Ya han aprendido muchas cosas en el curso; confíen en sus conocimientos y mucho ánimo!!

Pueden comunicarme sus dudas por el foro, correo o si nos vemos en persona



Se las recomiendo :)