Auxiliar 5

Subespacios vectoriales, independencia lineal y generadores

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 11 de septiembre de 2024

P1. [Subespacios vectoriales]

a) Se define $\mathcal{H} = \{H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid h_{ij} = 0 \ \forall i > j+1\}$. Muestre que $\mathcal{H}$ es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

b) Considere $U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$. Pruebe que U es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

c) Se denota por $\mathcal{P}_4[x]$ al espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 4.
Sea $W = \{q(x) \in \mathcal{P}_4[x] \mid q(x) = \beta + 2\gamma x + 3\beta x^2 + 2\gamma x^3 + \beta x^4, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Pruebe que W es s.e.v. de $\mathcal{P}_4[x]$.

P2. [Independencia lineal]

a) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ vectores distintos, y considere los conjuntos $U = \{u, v, w\}$ y $V = \{u - v, u + v, u - 2v + w\}$. Demuestre que U es linealmente independiente si y solo si V es linealmente independiente.

b) Sea $\mathcal{P}_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más n. Sean $p, q \in \mathcal{P}_n[x]$ tales que $\{p, q\}$ es l.i.. Demuestre que $\{p, q, p \cdot q\}$ es l.i. si y solo si $\text{grado}(p) \geq 1$ y $\text{grado}(q) \geq 1$.

c) Sea V un espacio vectorial, y $n \in \mathbb{N}$ fijo. El objetivo de este problema es comprender las operaciones para preservar la dependencia lineal entre un conjunto finito de vectores.

- **i)** Considere $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ un con conjunto de vectores linealmente dependientes. Muestre que el conjunto $\{v_i\}_{i=1}^n \cup \{v\}$ sigue siendo linealmente dependiente $\forall v \in V$.
- **ii)** Considere $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ un con conjunto de vectores linealmente independiente. Muestre que el conjunto $\{v_i\}_{i=1}^n \setminus \{v_k\}$ sigue siendo linealmente independiente $\forall k \in [1..n]$.

P3. [Generadores]

a) Sea $\mathcal{P}_3[x]$ el conjunto de polinomio a coeficientes reales de grado a lo más 3. Sean $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{P}_3[x]$ tal que:

$$q_1(x) = 1 + 6x^2, q_2 = 4x, q_3(x) = 1 + 3x + 5x^2$$

Muestre que dichos polinomios generan el espacio $\mathcal{P}_2[x]$.

b) Sea $W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es simétrica y } \sum_{i=0}^{3} a_{ii} = 0 \right\}$ y considere las siguientes matrices de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Pruebe que $\{M, V, A, D, T, \}$ es linealmente independiente. **ii)** Pruebe que $W = \langle \{M, V, A, D, T\} \rangle$.
iii) **(propuesto)** Demuestre que W es s.e.v. de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.

Principales definiciones y propiedades

- **[Caracterización de espacio vectorial]:** Sean $(V, +_V)$ un grupo abeliano, $(\mathbb{K}, +_\mathbb{K}, \cdot_\mathbb{K})$ un cuerpo, $*_V : \mathbb{K} \times V \to V$ ley de composición externa tal que $(\forall\,(\beta, v) \in \mathbb{K} \times V) : \beta * v \in V$. Luego $(V, +_V, *_V)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (también dicho $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si y solo si $(\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{K})\,(\forall\,u, v \in V)$ se cumple que:
  - **i)** $(a +_\mathbb{K} \beta) *_V v = \alpha *_V v \ +_V \ \beta *_V v$
  - **ii)** $\alpha *_V (u +_V v) = \alpha *_V u \ +_V \ \alpha *_V v$
  - **iii)** $\alpha *_V (\beta *_V V) = (\alpha \cdot_\mathbb{K} \beta) *_V v$
  - **iv)** $1_{\mathbb{K} \cdot_\mathbb{K}} *_V v = v$
- **[Subespacio vectorial]:** Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que U es subespacio vectorial de V si y solo si se cumple:
  - **i)** $U \neq \emptyset$
  - **ii)** $U \subset V$
  - **iii)** $(\forall u, v \in U) : u + v \in U$
  - **iv)** $(\forall \beta \in \mathbb{K})\,(\forall u \in U) : \beta u \in U$
- **[Intersección de subespacios vectoriales]:** Sea E un espacio vectorial definido sobre algún cuerpo. Sean U, V subespacios vectoriales de E, entonces $U \cap V$ es subespacio vectorial de E.
- **[Caracterización de subespacios vectoriales]:** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces U es subespacio vectorial de V si y solo si $(\forall u, v \in U)\,(\forall \beta \in \mathbb{K}) : u + \beta v \in U$.
- **[Combinación lineal]:** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ una colección de vectores y $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ una colección de escalares. El vector $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$ se denomina combinación lineal.
- **[Ser combinación lineal]:** Un vector $u \in V$ se dice combinación lineal de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ si y solo si existen $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ tales que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$.
- **[Subespacio vectorial generado por un conjunto]:** El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, también denominado el conjunto generado por dichos vectores, se define por:

$$\langle\{v_1, \cdots, v_n\}\rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i, \beta_i \in \mathbb{K} \right\}$$

  - $\langle\{v_1, \cdots, v_n\}\rangle$ es el subespacio vectorial de V más pequeño que contiene a los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$.
- **[Independencia lineal]**: Sean $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$. Los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ son **linealmente independientes** si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0 \implies \beta_i = 0, \forall i \in [1..n]$. De lo contrario, se dirán **linealmente dependientes**.
- **[Conjunto generador]**: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ generan V si y solo si $\langle\{v_1, \cdots, v_n\}\rangle = V$, es decir, $(\forall v \in V)\,(\exists \{\beta_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}) : v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$.
- **[Base]**: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. El conjunto de vectores $\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq V$ se dice base de V si y solo si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto linealmente independiente y genera a todo el espacio $V = \langle\{v_1, \cdots, v_n\}\rangle$.