Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-5 Álgebra Lineal · Primavera 2024

# Auxiliar 4

## Descomposición LDU, invertibilidad, sistemas lineales y espacios vectoriales

**Profesor:** Pablo R. Dartnell R.
**Auxiliar:** Bianca Zamora Araya
**Fecha:** 2 de septiembre de 2024

**P1. [Invirtiendo según Gauss]**

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $M$ es invertible si y solo si $\mu^2 \neq 1$ y calcule su inversa.

**P2. [Reescribiendo una matriz]**

Determine la descomposición $LDU$ de la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$.

**P3. [Otro sistema lineal]**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 1 \\ x + 3y + z + (3-\alpha)w = \alpha \\ x + z + (\alpha+5)w = \beta \\ x + 3y + 2z + 3w = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

Determine condiciones sobre los parámetros $\alpha, \beta$ de forma que: **i)** El sistema no admita solución. **ii)** El sistema tenga infinitas soluciones; explicite el conjunto solución. **iii)** El sistema tenga única solución; calcúlela para $\alpha = 1 = \beta$, y justifique si la matriz asociada al sistema es invertible (de ser así, calcule su inversa).

**P4. [Espacios vectoriales]**

**a)** Sea $(E, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$. Se define la ley de composición interna $\oplus$ en $E \times E$ tal que $(\forall\,(u,v),(u',v') \in E \times E) : (u,v) \oplus (u',v') = (u+u', v+v')$, así como la ley de composición externa $\odot$ en $\mathbb{K} \times E^2$ de modo que $(\forall\,\beta \in \mathbb{K})\,(\forall\,(u,v) \in E \times E) : \beta \odot (u,v) = (\beta \cdot u, \beta \cdot v)$.
Demuestre que $E \times E$ dotado de las operaciones anteriores es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

**P5. [Unicidad de la descomposición L(ower)D(iagonal)U(pper)]**

**a)** Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ admite una descomposición $LDU$, entonces esta es única. Utilice que, por definición, $L$ es matriz triangular inferior con entradas 1 en la diagonal, $D$ es matriz diagonal invertible (formada por los pivotes del escalonamiento) y $U$ es matriz triangular superior con entradas 1 en la diagonal.

**b)** Demuestre que si además $A$ es simétrica, entonces $L = U^T$.

## Principales definiciones y propiedades

- **[Definición de algunas matrices cuadradas]:** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dice **triangular superior** si sus coeficientes son nulos por debajo de la diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i > j$); se dice **triangular inferior** si sus coeficientes son nulos por sobre la diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i < j$); se dice **diagonal** si es triangular superior e inferior simultáneamente i.e. solo tiene coeficientes en diagonal ($a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$); se dice **simétrica** si verifica $A = A^T$ equivalente a $a_{ij} = a_{ji}\ \ \forall i, j \in [1..n]$; se dice **identidad** si es diagonal y cada una de sus entradas no nulas es igual a 1 ($a_{ij} = 1\ \forall i = j$), y es el neutro multiplicativo.
- **[Matriz elemental de permutación]:** Para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $p, q \leq n$ se define la matriz $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ como la matriz identidad de $n \times n$ luego de que se le permutaran las filas $p$ y $q$. Por esto $I_{pq}$ solo tiene entradas uno en la diagonal, salvo por las filas $p$ y $q$: el 1 de la fila $p$ está en la columna $q$, y el 1 de la fila $q$ está en la columna $p$.

  $I_{pq}$ es invertible y $(I_{pq})^{-1} = I_{pq}$.

  Con lo anterior, para $A, B$ matrices con dimensiones para que el producto esté bien definido: $I_{pq}A$ resulta en la matriz $A$ con las filas $p$ y $q$ permutadas, y $BI_{pq}$ resulta en la matriz $B$ con las columnas $p$ y $q$ permutadas.
- **[Matriz elemental de suma]:** Para $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ fijos, y $p, q \leq n$ tal que $p < q$, se define la matriz $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz identidad de $n \times n$ de entrada $\lambda$ en la posición $(q, p)$.

  $E_{pq}(\lambda)$ es invertible y $(E_{pq}(\lambda))^{-1} = E_{pq}(-\lambda)$.

  Con lo anterior, para $A, B$ matrices con dimensiones para que el producto esté bien definido: $E_{pq}(\lambda)A$ resulta en la matriz A tal que a la fila $q$ se le sumó la fila $p$ ponderada por $\lambda$, y $BE_{pq}(\lambda)$ resulta en la matriz B tal que a la columna $p$ se le sumó la columna $q$ ponderada por $\lambda$.
- Un sistema con $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- **[Matriz escalonada]:** Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, la matriz escalonada asociada a la matriz $A$ se define por $\tilde{A}$ y es tal que en cada columna existe un índice que barre por las filas tal que, a partir de dicho índice, solo hay ceros como entradas en la columna (o bien, que antes de dicho índice, hay entradas no nulas en la columna); este índice va aumentado en la medida que se barre por las columnas. Esto provoca se visualice una forma de "escalones" en la matriz. Esta matriz $\tilde{A}$ se obtiene mediante la premultiplicación de $A$ por matrices elementales (de suma o de permutación de filas): $\tilde{A} = \left(\prod_j Q_j\right) A$. Las entradas de cada columna en tales que arriba las entradas son no nulas y abajo son nulas se llaman **pivotes**.
- **[Sistemas equivalentes]:** Dada una matriz $C$ invertible, entonces: $a \in \mathbb{K}^n$es solución de$Ax = b \iff a$es solución de $(CA)\,x = Cb$. Esto permite concluir que los sistemas $Ax = b$ y $\tilde{A}x = \tilde{b}$.
- **[Teorema que caracteriza unicidad e invertibilidad de un sistema matricial cuadrado]:** Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Entonces las siguientes son equivalentes $A$ es invertible, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$ y $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \in \mathbb{K}^n$.
- **[Caracterización de espacio vectorial]:** Sean $(V, +_V)$ un grupo abeliano, $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ un cuerpo, $*_V : \mathbb{K} \times V \to V$ ley de composición externa tal que $(\forall\,(\beta, v) \in \mathbb{K} \times V) : \beta * v \in V$. Luego $(V, +_V, *_V)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (también dicho $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si y solo si $(\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{K})\,(\forall\,u, v \in V)$ se cumple que:
  - $(a +_{\mathbb{K}} \beta) *_V v = \alpha *_V v\ +_V\ \beta *_V v$
  - $\alpha *_V (u +_V v) = \alpha *_V u\ +_V\ \alpha *_V v$
  - $\alpha *_V (\beta *_V V) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) *_V v$
  - $1_{\mathbb{K} \cdot_{\mathbb{K}}} *_V v = v$