DESARROLLO AUX 2

MÁS PROPIEDADES DE MATRICES Y APLICACIONES

MA1102-5

2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1 Ecuación matricial en X: $MX=J$ $\quad M \in \mathcal{M}_{mn}$, $J \in \mathcal{M}_{m1}$

P.D.Q. X_1, X_2 solucionan $MX=J$ $\quad \Rightarrow X \in \mathcal{M}_{n1}$

$\Rightarrow 4X_2 - 3X_1$ es solución de $MX=J$

La idea esencial es "satisfacer ecuación", esto significa que cumple la igualdad.

En efecto,

Por hipótesis $MX_1 = J$, $MX_2 = J$ pues X_1, X_2 solucionan la ecuación.

P.D.Q. $M(4X_2 - 3X_1) = J$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow M(4X_2) - M(3X_1) = J && \text{distribución}\\
&\Leftrightarrow 4MX_2 - 3MX_1 = J && \text{escalares quedan por delante}\\
&\Leftrightarrow 4J - 3J = J && \text{hipótesis}\\
&\Leftrightarrow J = J \Leftrightarrow \text{V}
\end{aligned}$$

demostrando lo pedido ∎

P2

P2 $\quad A, B, C \in M_{n\times n}$ (del mismo tamaño (algún $n \in \mathbb{N}$)) t.q. $\begin{cases} A + 3B - C = 0 & (1) \\ 2A - B - C = 0 & (2) \end{cases}$

P.D.Q. $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}): A = \alpha C \wedge B = \beta C$

La idea es utilizar el sistema que satisfacen y reducirlo a alguna igualdad que relacione de a pares a las matrices; de ahí se obtendrán los escalares buscados.

En efecto,

$\underbrace{2(1) - (1)}_{\substack{\text{anular } A \\ (\text{deja } B \text{ y } C)}}$:
$$\begin{aligned} 2A + 6B - 2C &= 0 \\ -2A + B + C &= 0 \end{aligned} \Rightarrow 7B - C = 0 \Leftrightarrow 7B = C \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{1}{7}C}$$

$\underbrace{(1) + 3(2)}_{\substack{\text{anular } B \\ (\text{deja } A \text{ y } C)}}$:
$$\begin{aligned} A + 3B - C &= 0 \\ + \\ 6A - 3B - 3C &= 0 \end{aligned} \Rightarrow 7A - 4C = 0 \Leftrightarrow 7A = 4C \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{4}{7}C}$$

lo anterior se justifica por conmutatividad de la suma de matrices (del mismo tamaño) y distributividad de escalares al ponderar matrices.

Luego se han encontrado los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$B = \frac{1}{7}C \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{7}} \; ; \; A = \frac{4}{7}C \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{4}{7}}$$

$\blacksquare$

P_3

P3 a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1/5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← es como la identidad pero con sus filas en otro orden ö

Estudiar BF, FB.

• $BF = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1/5 & 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

guarda 3° coordenada

guarda 1° coordenada

guarda 2° coordenada

$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 9 & 1/5 & 3 \end{pmatrix}$ → intercambió columnas 1 y 2! (de la matriz B).
esto porque primero guarda 2° coordenada, y en 2° lugar guarda 1° coordenada.

• $FB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1/5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1/5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ → intercambió filas 1 y 2! (de la matriz B)
esto porque captura primero la 2° coordenada barriendo por columnas, y luego en segundo lugar guarda la 1° coordenada barriendo por las columnas.

P3 b) $I \in M_{n \times n}$, $A \in M_{n\times n}$. La idea es generalizar uno de los casos vistos en el ejemplo.

$$\underbrace{\begin{array}{c} \\ \text{fila } l \\ \\ \text{fila } k \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}}_{=H} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

guarda coordenada k-ésima en la fila de lugar l

$$\begin{array}{c} \\ \\ l) \\ \\ k) \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & a_{m-1\,3} & a_{m-1\,4} & \cdots & \cdots & a_{m-1\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = HA$$

guarda coordenada l-ésima en la fila de lugar k

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} & \cdots & \cdots & a_{ln} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow$$

justamente es la matriz A con sus filas l y k intercambiadas.

P4

(P4) $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $M^TM \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\exists (M^TM)^{-1}$ (M^TM invertible)

$P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$: $P = I - M(M^TM)^{-1}M^T$

(P4) i) P.D.Q. $P^2 = P \wedge PM = \mathbb{O}_{m,n}$

- $P^2 = P$ el lado que más aporta info. es P^2 porque se tiene la def. de P y se puede trabajar

En efecto,

$$
\begin{aligned}
P^2 &= PP \quad \text{... def. recursiva}\\
&= [I - M(M^TM)^{-1}M^T][I - M(M^TM)^{-1}M^T] \quad \text{... def. } P\\
&= II - IM(M^TM)^{-1}M^T \quad \text{distributividad}\\
&\quad - M(M^TM)^{-1}M^TI - M(M^TM)^{-1}M^T(-M(M^TM)^{-1}M^T)\\
&= I - M(M^TM)^{-1}M^T \quad \text{identidad es neutro multiplicativo}\\
&\quad - M(M^TM)^{-1}M^T + M\underbrace{(M^TM)^{-1}M^TM}_{= I \text{, pues } M^TM \text{ invertible}}(M^TM)^{-1}M^T\\
&= I - 2M(M^TM)^{-1}M^T + MI(M^TM)^{-1}M^T \quad \text{sumar términos}\\
&= I - 2M(M^TM)^{-1}M^T + M(M^TM)^{-1}M^T \quad I \text{ es neutro multiplicativo}\\
&= I - M(M^TM)^{-1}M^T \quad \text{sumar términos}\\
&= P \;/\!/ \quad \text{... def. } P
\end{aligned}
$$

- $PM = O$ La idea es realizar el producto porque es lo que más aporta info. ya que se conoce la definición de P.

En efecto,

$$PM = (I - M(M^TM)^{-1}M^T)M \quad \text{... def. } P$$

$$= IM - M\underbrace{(M^TM)^{-1}\underbrace{M^TM}}_{= I\text{, pues } M^TM \text{ es invertible}} \quad \text{distributividad}$$

$$= M - MI \quad I \text{ es neutro multiplicativo}$$

$$= M - M = O \;//$$

—o—

se muestra así lo pedido. ∎

(P4) ii) P.D.Q. M^TM, P son simétricas

Hay que chequearlo por definición: ser igual a su traspuesta

En efecto,

- $(M^TM)^T = M^T(M^T)^T \stackrel{!}{=} M^TM \quad \therefore M$ es simétrica //

$(A^T)^T = A \;\; \forall A$ matriz de $n \times n$

prop $(AB)^T = B^TA^T$ (*)

- $(I - M(M^TM)^{-1}M^T)^T \stackrel{!}{=} I^T - [M(M^TM)^{-1}M^T]^T$ $\quad (A+B)^T = A^T + B^T$

$= I - (M^T)^T[M(M^TM)^{-1}]^T = I - (M^T)^T([(M^TM)^{-1}]^TM^T)$

- I simétrica
- (*)

$= I - (M^T)^T([(M^TM)^T]^{-1}M^T) = I - (M^T)^T([M^T(M^T)^T]^{-1}M^T)$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ (*)

$= I - M((M^TM)^{-1})M^T) = I - M(M^TM)^{-1}M^T = P \;\therefore P$ es simétrica ∎

$(A^T)^T = A$

(P4) iii) P.D.Q. P no es invertible

Demostrar que algo no ocurre es más cómodo de hacer mediante contradicción: Asumir que ocurre, y ver que no puede hacerlo por reducción a absurdo.

En efecto,

Por contradicción, supóngase que P es invertible

Entonces $\exists P^{-1}$ t.q. $PP^{-1} = I = P^{-1}P$

Pero
$$
\begin{aligned}
0 &= P^{-1}0 && PM = 0 \text{ por i)} \\
&= P^{-1}(PM) && \text{asociatividad} \\
&= (P^{-1}P)M && P^{-1}P = I \text{ pues } P \text{ invertible (hipótesis)} \\
&= IM && I \text{ es neutro multiplicativo} \\
&= M
\end{aligned}
$$

Luego $M = 0 \Rightarrow M^T = 0$.

Así $M^T M = 0$

pues $M^T M$ es invertible por enunciado $\Leftrightarrow M^T M \neq 0$.

Como se procedió por contradicción y se llegó a un absurdo, el supuesto es falso y su negación es verdadera. Luego P no puede ser invertible, demostrando así lo pedido.

P5

P5 $T \in M_{nn}(\mathbb{R})$: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$e \in M_{n1}(\mathbb{R})$

$J_{ij} = e_{i1} = 1 \quad \forall i,j \leq n$

P5 i) P.D.Q. $Je = ne \wedge J^2 = nJ$

- $Jn = ne$ Dos matrices son iguales si lo son componente a componente.

En efecto,

Notar que $Je \in M_{n1}(\mathbb{R})$ por def. producto matricial

$$\Rightarrow (Je)_{i1} \underset{\text{def. producto matricial}}{=} \sum_{r=1}^{n} J_{ik} e_{k1} \underset{\text{def. } J,\, e}{=} \sum_{r=1}^{n} 1 \cdot 1 \underset{\text{sumatoria conocida.}}{=} n$$

También ne es solo ponderar e por n:

$$(ne)_{i1} = n e_{i1} \underset{\text{def. } e}{=} n \cdot 1 = n$$

Luego, se tiene la igualdad $(Je)_{i1} = (ne)_{i1} \Rightarrow Je = ne$ //

Para checar que $J^2 = nJ$ es análogo

(Ps) ii) $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \neq \frac{1}{n}$

Determinar $\gamma \in \mathbb{R}$: $(I-\mu J)^{-1} = I + \gamma J$

La idea es estudiar la igualdad y hallar alguna condición sobre γ

En efecto,

$$(I-\mu J)^{-1} = I + \gamma J \text{ ssi } (I-\mu J)(I+\gamma J) = I$$
$$= (I+\gamma J)(I-\mu J)$$

En particular,

$$(I-\mu J)(I+\gamma J) = I$$

distributividad

$$\Leftrightarrow IJ + I\gamma J - \mu J I - \mu\gamma JJ = I$$

factorizar escalares

$$\Leftrightarrow I + \gamma I J - \mu J I - \mu\gamma J^2 = I$$

identidad es neutro multiplicativo

i)

$$\Leftrightarrow I + \gamma J - \mu J - \mu\gamma n J = I \quad / -I$$

factorización

$$\Leftrightarrow (\gamma - \mu - \mu\gamma n) J = 0$$

condición

$$\Rightarrow \gamma - \mu - \mu\gamma n = 0$$

factorizar.

$$\Rightarrow \gamma(1-\mu n) - \mu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\mu}{1-\mu n}}$$

($\in \mathbb{R}$ por ser operatoria de $\mu, n \in \mathbb{R}$ y está bien def. pues $1-\mu n \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq \frac{1}{n}$).

P5 iii) Verificar $\mu = \frac{1}{n} \Rightarrow (I - \mu J)e = 0$

Como es verificar, hay que reemplazar solar! :)

En efecto,

si $\mu = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow (I - \mu J)e \overset{\mu = \frac{1}{n}}{=} (I - \tfrac{1}{n} J)e \overset{\text{distribuir}}{=} Ie - \tfrac{1}{n} Je$$

$$= e - \cancel{\tfrac{1}{n}}\underbrace{\cancel{n}e}_{i)} = e - e = 0_{//}$$

P6

P6) a) $\mathbb{1} := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbb{1}^T = (1\ 1\ 1) \in \mathcal{M}_{13}(\mathbb{R})$

Calcular $\mathbb{1}^T\mathbb{1}$, $\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ y decir dimensiones

En efecto,

$\left.\begin{array}{l}\mathbb{1} \text{ es de } 3\times 1\\ \mathbb{1}^T \text{ es de } 1\times 3\end{array}\right\}$

* $\mathbb{1}^T\mathbb{1}$ es de $[\underbrace{1\times 3 \quad 3\times 1}]$ 1×1
  $\therefore \mathbb{1}^T\mathbb{1} \in \mathbb{R}$

* $\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ es de $[\underbrace{3\times 1 \quad 1\times 3}]$ 3×3
  $\therefore \mathbb{1}\mathbb{1}^T \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$

- $\mathbb{1}^T\mathbb{1} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 3$ //

- $\mathbb{1}\mathbb{1}^T = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1) = \begin{pmatrix}1\cdot1 & 1\cdot1 & 1\cdot1\\ 1\cdot1 & 1\cdot1 & 1\cdot1\\ 1\cdot1 & 1\cdot1 & 1\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ //

P6) b) $I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $M_a := (1-a)I + a\mathbb{1}\mathbb{1}^T = \begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$
$(\forall a \in \mathbb{R})$

P.D.Q. $M_a(dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T) = (1-a)I + ((1-a)e + 3ae + ad)\mathbb{1}\mathbb{1}^T$

Siempre lo más útil es usar la definición!

En efecto,

$M_a(dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T)$ $\quad$ ↓ def. M_a

$= [(1-a)I + a\mathbb{1}\mathbb{1}^T][dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T]$

$$= (1-a)IdI + (1-a)Ie\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$ distributividad

$$+ a\mathbb{1}\mathbb{1}^T dI + a\mathbb{1}\mathbb{1}^T e\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$

$$= (1-a)dI^2 + (1-a)eI\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$ factorización de constantes

$$+ ad\mathbb{1}\mathbb{1}^T I + ae[\mathbb{1}\mathbb{1}^T][\mathbb{1}\mathbb{1}^T]$$

$$= (1-a)dI + (1-a)e\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$

- asociatividad
- I es neutro multiplicativo

$$+ ad\mathbb{1}\mathbb{1}^T + ae\,\mathbb{1}\underbrace{(\mathbb{1}^T\mathbb{1})}_{=3,\ a)}\mathbb{1}^T$$

$$= (1-a)dI + (1-a)e\mathbb{1}\mathbb{1}^T + ad\mathbb{1}\mathbb{1}^T + 3ae\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$

$$= (1-a)dI + [(1-a)e + 3ae + ad]\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$

- distributividad
- conmutatividad

Por transitividad se concluye lo pedido. $\boxtimes$

P6 c) $a \in \mathbb{R}\setminus\{1, -\frac{1}{2}\} \Rightarrow a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -\frac{1}{2}$

Encontrar $d, e : dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T = M_a^{-1}$ sea la inversa de M_a

Como pide usar lo anterior, y ahí se estudió un cierto producto que involucra d, e, la idea sería lo siguiente:

$$(dI + e\mathbb{1}\mathbb{1}^T)((1-a)I + a\mathbb{1}\mathbb{1}^T) = I$$ ser inversa de Ma

$$= (1-a)dI + ((1-a)e + 3ae + ad)\mathbb{1}\mathbb{1}^T$$

usar lo anterior

Como la igualdad se quiere, entonces es necesario que
$$\begin{cases} (1-a)d = 1 \quad (1) \to \text{mantiene } I \\ (1-a)e + 3ae + ad = 0 \quad (2) \to \text{pues sólo se quiere } I \end{cases}$$

Así

(1): $d = \dfrac{1}{1-a}$ $(1)'$ bien definido pues $a \neq 1$

$(1)' \to (2)$ $(1-a)e + 3ae + \dfrac{a}{1-a} = 0$

$$\Leftrightarrow [(1-a)+3a]e = \frac{a}{a-1}$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)e = \frac{a}{a-1}$$

$$\Rightarrow e = \frac{a}{(2a+1)(a-1)} = \frac{a}{2a+1}\left(\frac{-1}{1-a}\right) = \frac{-ad}{2a+1} \;//$$

bien definido pues $1-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$
$2a+1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}$

Mucho ánimo! Que tengan una buena semana.
Dudas por correo, foro o cuando nos veamos (: