Auxiliar 14: G-S y Hermíticas

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores ortonormales y $A = uu^t + vv^t$.

a) ¿Qué es A? ¿Qué propiedades tiene?

b) Pruebe que si $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y w es ortogonal a u y v, entonces w es vector propio de A. ¿Cuál es el valor propio asociado?

c) Pruebe que u, v son vectores propios y determine los valores propios asociados a cada uno.

d) Pruebe que si $z \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A asociado al valor propio $\lambda \neq 0$, entonces z es combinación lineal de u y v.

P2. Matraca G-S Considere

$$\text{Para a): } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Para b): } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Encuentre una base ortonormal de $\langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle$

b) A partir de los vectores propios de A obtenga una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

P3. En realidad nada es tan feo Sea $A \in \mathcal{M}_{8\times 8}(\mathbb{R})$ con valores propios $\alpha = 2$, $\beta = 0$ y $\gamma = 3$ de multiplicidades algebraicas 2, 1 y 5, respectivamente. Considere a U, V y W como los subespacios de vectores propios de A, donde

$$U = \{e_1\}, \quad V = \{e_2 - e_3, e_2, e_3\}, \quad W = \{e_5, e_6 + e_7, e_6 - e_7, e_8, e_4 - e_5, e_4 + e_8\}$$

a) Encuentre bases ortonormales para U, V y W.

b) Para cada espacio de vectores propios, indique a qué valor propio está asociado.

c) Pruebe que usando las bases encontradas en P3.a) se puede diagonalizar A en la forma $A = PDP^T$, con D matriz diagonal. Concluya que A es simétrica.

Dada $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, definimos la matriz adjunta de A, A^*, de la siguiente forma:

$$\forall k, \ell : (A^*)_{k\ell} = \overline{a_{\ell k}}.$$

Decimos que A es **hermítica** si $A = A^*$, notar que si $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ entonces $A = A^*$ si y sólo so $A = A^t$. De forma análoga al caso simétrico se prueba que

Corolario 4.5. *Vectores propios de $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

Corolario 4.6. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, entonces A es diagonalizable y más aún, $A = PDP^t$ donde $P = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A. D es la matriz diagonal de los valores propios correspondientes.*

****

Definición (Norma Euclidiana) La *norma Euclidiana* (o, simplemente, *norma*) de un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ (raíz cuadrada ≥ 0).

Tenemos así la función norma

$$\begin{array}{cccc} \|\;\| & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \mathbf{x} & \longmapsto & \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{array}.$$

Proposición 4.7. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ *y* $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|$
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$ $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(Desigualdad Triangular.)*

Definición (Perpendicularidad) Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se dicen *perpendiculares* u *ortogonales* ssi $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Lo anotaremos como $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Definición (Ángulo entre vectores) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Definimos el *ángulo* entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como aquel número $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Resumen Auxiliar 14
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

- **[Def] Proyección:** la proyección de u sobre $v \neq 0$ está dada por

$$P_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Este vector es "el que está más cerca" de u en el espacio $\langle \{v\} \rangle$. Es decir:

$$\min_{\lambda \in \mathbb{K}} ||u - \lambda v|| = ||u - P_v(u)||$$

Definición (Conjunto ortogonal/ortonormal) Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice **ortogonal** si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Si además $\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle^{\frac{1}{2}} = 1$, diremos que el conjunto es **ortonormal**.

En el caso en que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es además base de un subespacio vectorial W, diremos que se trata de una **base ortonormal** de W.

Proposición 4.8. *Sea $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ortogonal, entonces $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es l.i.*

Proposición 4.10. *Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ posee una base ortonormal.*

Definición (Proyección ortogonal sobre un s.e.v.) Sea W un subespacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal de W. Definimos la **proyección ortogonal sobre** W como la función

$$\begin{array}{rcl} P : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & P(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle \, u_i \in W. \end{array}$$

Proposición 4.11. *Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y P su proyección ortogonal asociada, entonces:*

1. *P es una transformación lineal.*
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in W, \quad (x - P(x)) \perp w.$
3. $\mathrm{d}(x, P(x)) = \min_{w \in W} \mathrm{d}(x, w).$

Definición (Subespacio ortogonal) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ definamos el **ortogonal** de W como:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall w \in W \quad \langle w, u \rangle = 0\}.$$

Proposición 4.12.

(i) *$W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

(ii) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.

(iii) $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.

Proposición 4.9. *Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortonormal de W, entonces:*

1. *Si $x \in W$,*
$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle \, u_i.$$
2. *Si $x \in \mathbb{R}^n$ y definimos*
$$z = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle \, u_i \in W,$$
entonces $(x - z) \perp w$, $\forall w \in W$. Y en particular $\mathrm{d}(x, z) = \min_{w \in W} \mathrm{d}(x, w)$, de hecho $\forall w \in W \setminus \{z\}$, $\mathrm{d}(x, z) < \mathrm{d}(x, w)$.

****

- **[Teo] Gram-Schmidt:** Dado un conjunto $\{v_0, ..., v_m\} \subseteq \mathbb{K}^n$, existe un conjunto ortonormal $\{u_1, ..., u_k\}$ tal que:

$$\langle \{v_0, ..., v_m\} \rangle = \langle \{u_o, ..., u_k\} \rangle$$

La demostración de este teorema permite encontrar este conjunto con el siguiente algoritmo:

- **[Alg] Gram-Schmidt:** Dado un conjunto $\{v_1, ..., v_m\}$ entrega un conjunto $\{u_1, ..., u_k\}$ que cumple con el Teo. de Gram-Schmidt:

1: Partir con $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$

2: Luego, proyectar v_2 sobre el subespacio generado por u_1:
$$z_2 = \langle v_2, v_1 \rangle u_1$$
y restamos esta proyección a v_2:
$$w_2 = v_2 - z_2$$
perpendicular a $\langle \{u_1\} \rangle$ y normalizamos, $u_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$

3: Luego pasar a trabajar con v_2
$$z_3 = \langle v_3, u_1 \rangle u_1 + \langle v_3, u_2 \rangle u_2$$
$$w_3 = v_3 - z_3$$

4: Continuar de manera iterativa, una vez obtenidos $\{u_1, ..., u_k\}$, calcular:
$$z_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i$$
$$w_{k+1} = v_{k+1} - z_{k+1}$$
perpendicular a $\langle \{u_1, ..., u_k\} \rangle$ y normalizamos: $u_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{||w_{k+1}||}$

5: Si algún $u_i = 0$, ignorarlo y seguir con el algoritmo

6: El proceso termina cuando se procesan todos los v_i