

Resumen Auxiliar 14
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas ♡☺

Dada $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, definimos la matriz adjunta de A , A^* , de la siguiente forma:

$$\forall k, \ell : (A^*)_{k\ell} = \overline{a_{\ell k}}.$$

Decimos que A es **hermítica** si $A = A^*$, notar que si $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ entonces $A = A^*$ si y sólo si $A = A^t$. De forma análoga al caso simétrico se prueba que

Corolario 4.5. *Vectores propios de $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

Corolario 4.6. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, simétrica, entonces A es diagonalizable y más aún, $A = PDP^t$ donde $P = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A . D es la matriz diagonal de los valores propios correspondientes.*

DEFINICIÓN (NORMA EUCLIDIANA) La *norma Euclidiana* (o, simplemente, *norma*) de un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ (raíz cuadrada ≥ 0).

Tenemos así la función norma

$$\begin{array}{ccc} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{array}.$$

Proposición 4.7. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \|\mathbf{x}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
3. $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (*Desigualdad Triangular.*)

DEFINICIÓN (PERPENDICULARIDAD) Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se dicen *perpendiculares* u *ortogonales* ssi $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Lo anotaremos como $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

DEFINICIÓN (ÁNGULO ENTRE VECTORES) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Definimos el *ángulo* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} como aquel número $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Resumen Auxiliar 14
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

■ **[Def] Proyección:** la proyección de u sobre $v \neq 0$ está dada por

$$P_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Este vector es “el que está más cerca” de u en el espacio $\langle \{v\} \rangle$. Es decir:

$$\min_{\lambda \in \mathbb{K}} \|u - \lambda v\| = \|u - P_v(u)\|$$

DEFINICIÓN (CONJUNTO ORTOGONAL/ORTONORMAL) Un conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ de \mathbb{R}^n se dice **ortogonal** si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Si además $\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle^{\frac{1}{2}} = 1$, diremos que el conjunto es **ortonormal**.

En el caso en que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es además base de un subespacio vectorial W , diremos que se trata de una **base ortonormal** de W .

Proposición 4.8. Sea $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ortogonal, entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es l.i.

Proposición 4.10. Todo subespacio vectorial de \mathbb{R}^n posee una base ortonormal.

DEFINICIÓN (PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UN S.E.V.) Sea W un subespacio vectorial \mathbb{R}^n y $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortonormal de W . Definimos la **proyección ortogonal sobre W** como la función

$$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow W$$

$$x \longmapsto P(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i \in W.$$

Proposición 4.11. Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y P su proyección ortogonal asociada, entonces:

1. P es una transformación lineal.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in W, (x - P(x)) \perp w$.
3. $d(x, P(x)) = \min_{w \in W} d(x, w)$.

DEFINICIÓN (SUBESPACIO ORTOGONAL) Sea W un subespacio de \mathbb{R}^n definamos el **ortogonal** de W como:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall w \in W \quad \langle w, u \rangle = 0\}.$$

Proposición 4.12.

- (i) W^\perp es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- (ii) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.
- (iii) $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.

Proposición 4.9. Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortonormal de W , entonces:

1. Si $x \in W$,

$$x = \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i.$$

2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y definimos

$$z = \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i \in W,$$

entonces $(x - z) \perp w, \forall w \in W$. Y en particular $d(x, z) = \min_{w \in W} d(x, w)$, de hecho $\forall w \in W \setminus \{z\}, d(x, z) < d(x, w)$.

■ **[Teo] Gram-Schmidt:** Dado un conjunto $\{v_0, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{K}^n$, existe un conjunto ortonormal $\{u_1, \dots, u_k\}$ tal que:

$$\langle \{v_0, \dots, v_m\} \rangle = \langle \{u_0, \dots, u_k\} \rangle$$

La demostración de este teorema permite encontrar este conjunto con el siguiente algoritmo:

■ **[Alg] Gram-Schmidt:** Dado un conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ entrega un conjunto $\{u_1, \dots, u_k\}$ que cumple con el Teo. de Gram-Schmidt:

- 1: Partir con $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
- 2: Luego, proyectar v_2 sobre el subespacio generado por u_1 :

$$z_2 = \langle v_2, v_1 \rangle u_1$$

y restamos esta proyección a v_2 :

$$w_2 = v_2 - z_2$$

perpendicular a $\langle \{u_1\} \rangle$ y normalizamos,

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

- 3: Luego pasar a trabajar con v_2

$$z_3 = \langle v_3, u_1 \rangle u_1 + \langle v_3, u_2 \rangle u_2$$

$$w_3 = v_3 - z_3$$

- 4: Continuar de manera iterativa, una vez obtenidos $\{u_1, \dots, u_k\}$, calcular:

$$z_{k+1} = \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i$$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - z_{k+1}$$

perpendicular a $\langle \{u_1, \dots, u_k\} \rangle$ y

normalizamos: $u_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}$

- 5: Si algún $u_i = 0$, ignorarlo y seguir con el algoritmo
- 6: El proceso termina cuando se procesan todos los v_i