Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-1 - Primavera 2024 – Álgebra Lineal

Guía 5: Diagonalización y Eigen [Values + Vectors]

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1, 2, 3, Diagonalice

Diagonalice, de ser posible, las siguientes matrices. Si la matriz trabajada no es diagonalizable, indique la razón.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente un buen ramo en PC!!!

Recuerda las buenas preguntas para la diagonalizabilidad:

1. ¿Es simétrica?
2. Polinomio característico ¿Se repiten los valores propios?
3. ¿La multiplicidad algebraica coincide con la geométrica?

P2. Completa la matriz

Complete la siguiente matriz $M \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ & \end{pmatrix}$$

De manera que los vectores propios asociados a M sean $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalmente un buen departamento en la FCFM!!!

1. Si v_1 y v_2 son vectores propios, y parcialmente conocemos M, ¿podemos encontrar los valores propios?

2. ¿Preparad@ para resolver un sistema de ecuaciones?

P3. Un poquito de allá, un poquito de acá

a) Si $A^2 = A$, entonces los únicos valores propios asociados a A pueden ser 0 y 1.

b) Si A es nilpotente, entonces todos sus valores propios son nulos (una matriz N se dice nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$).

c) A no es invertible si y sólo si tiene al 0 como valor propio asociado.

d) Si A es invertible, entonces los recíprocos de los valores propios de A son valores propios de A^{-1}.

e) Pruebe que si λ es un valor propio de A, de vector propio v, entonces $\lambda^2 + \lambda$ es valor propio de la matriz $A^2 + A$.

f) Pruebe que si A es diagonalizable también lo es $A^2 + A$.

g) Sea $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $\lambda_i \geq 0$ tal que $Aw_i = \lambda_i w_i$. Sea P la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, donde su columna j es w_j, para $j = 1, \ldots, n$, esto es $P = [w_1\, w_2\, \ldots\, w_n]$, y F la matriz diagonal de tamaño $n \times n$ con $F_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$ para $i = 1, \ldots, n$.

   Demuestre que $R = PFP^\top$ es una matriz simétrica y $R^2 = A$.

Finalmente un buen Equipo Docente!!!

1. ¿Qué significa ser diagonalizable?
2. Cuando demostramos algo feo, a veces, ir por contradicción suele ser una buena idea
3. Cuando demostramos algo feo, a veces, ir por contra-recíproca suele ser una buena idea