

Resumen Auxiliar 4
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas ♡☺

DEFINICIÓN (VECTOR Y VALOR PROPIO) Diremos que $x \in V$ es un **vector propio** de L si:

- (i) $x \neq 0$
- (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $L(x) = \lambda x$.

En este caso el valor $\lambda \in \mathbb{K}$ que satisface (ii) se denomina **valor propio** asociado a x .

Proposición 4.1. Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, son equivalentes:

- (i) $\exists x \neq 0 \ Ax = \lambda x$.
- (ii) $\exists x$ solución no trivial del sistema $(A - \lambda I)x = 0$.
- (iii) $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$
- (iv) $A - \lambda I$ no es invertible.

DEFINICIÓN (DETERMINANTE) Definimos el determinante de A como

- (i) Si A es de 1×1 $|A| = a$ donde $A = a$.
- (ii) Si A es de $n \times n$ $|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |A^{i1}|$.

4. $|I| = 1$ donde I es la identidad. Si A es triangular superior entonces $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

7. A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

9. $|AB| = |A||B|$.

10. Si A es invertible entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$.

11. $|A| = |A^t|$. Además de (4) si A es triangular inferior entonces $|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

DEFINICIÓN (POLINOMIO CARACTERÍSTICO) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ es llamado el **polinomio característico** de A .

Algunas ventajas de conocer D :

(1) $r(A) = r(D)$ = número de valores propios no nulos.

(2) $|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |D| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

(3) $|A| \neq 0$ entonces $\forall i, \lambda_i \neq 0$ y $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ donde

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN (MATRIZ DIAGONALIZABLE) Diremos que $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ es **diagonalizable** si $\mathbb{K}^n$ admite una base de vectores propios de A .

Teorema 4.2. Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ si $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,k}$ son valores propios de A distintos y $\{v_i\}_{i=1,\dots,k}$ son vectores propios de A tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces $\{v_i\}_{i=1,\dots,k}$ es un conjunto l.i.

DEFINICIÓN (MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA) Sean $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A . Definimos la **multiplicidad algebraica** de λ , $\alpha_A(\lambda)$, como la máxima potencia de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio característico de A , $p_A(x) = |A - xI|$.

Corolario 4.2. Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ y $p_A(\lambda)$ su polinomio característico. Se tiene entonces que A es diagonalizable si y sólo si $p_A(\lambda)$ se factoriza completamente en $\mathbb{K}$ en factores lineales. Es decir:

$$p_A(\lambda) = c_A \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_A(\lambda_1)} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_A(\lambda_2)} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_A(\lambda_k)},$$

y además, para todo valor propio λ de A , se tiene que $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$.