Auxiliar 12: Diagonalización y Eigen [Values + Vectors]

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Justifique adecuadamente cual, o cuales, de la matrices A, B, y C es diagonalizable

b) Determine los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales D es diagonalizable

P2. Matraca

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Para cada una de ellas, de ser posible, diagonalícelas

b) ¿Qué se puede concluir con respecto a la relación de los polinomios característicos de B y C, y su diagonalizabilidad?

P3. Para concluir

a) Demuestre que, si λ es un valor propio de A, de vector propio v, entonces $\lambda^2 + \lambda$ es valor propio de la matriz $A^2 + A$.

b) Demuestre que, si A es diagonalizable, también lo es $A^2 + A$.

c) Demuestre que, A no es invertible, si y sólo si, tiene al 0 como valor propio asociado.

Resumen Auxiliar 4
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (VECTOR Y VALOR PROPIO) Diremos que $x \in V$ es un **vector propio** de L si:

(i) $x \neq 0$

(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $L(x) = \lambda x$.

En este caso el valor $\lambda \in \mathbb{K}$ que satisface (ii) se denomina **valor propio** asociado a x.

Proposición 4.1. *Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, son equivalentes:*

(i) $\exists x \neq 0$ $Ax = \lambda x$.

(ii) $\exists x$ *solución no trivial del sistema* $(A - \lambda I)x = 0$.

(iii) $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

(iv) $A - \lambda I$ *no es invertible.*

DEFINICIÓN (DETERMINANTE) Definimos el determinante de A como

(i) Si A es de 1×1 $|A| = a$ donde $A = a$.

(ii) Si A es de $n \times n$ $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A^{i1}|$.

4. $|I| = 1$ *donde I es la identidad.Si A es triangular superior entonces* $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

7. A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

9. $|AB| = |A||B|$.

10. Si A es invertible entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$.

11. $|A| = |A^t|$. *Además de (4) si A es triangular inferior entonces* $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Resumen Auxiliar 4
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (POLINOMIO CARACTERÍSTICO) $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ es llamado el **polinomio característico de** A.

Algunas ventajas de conocer D:

(1) $r(A) = r(D) =$ número de valores propios no nulos.

(2) $|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |D| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(3) $|A| \neq 0$ entonces $\forall i$, $\lambda_i \neq 0$ y $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ donde

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN (MATRIZ DIAGONALIZABLE) Diremos que $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ es **diagonalizable** si $\mathbb{K}^n$ admite una base de vectores propios de A.

Teorema 4.2. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ si $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,k}$ son valores propios de A distintos y $\{v_i\}_{i=1\dots,k}$ son vectores propios de A tal que $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces $\{v_i\}_{i=1,\dots,k}$ es un conjunto l.i.*

DEFINICIÓN (MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA) Sean $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ y λ un valor propio de A. Definimos la **multiplicidad algebraica** de λ, $\alpha_A(\lambda)$, como la máxima potencia de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio característico de A, $p_A(x) = |A - xI|$.

Corolario 4.2. *Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ y $p_A(\lambda)$ su polinomio característico. Se tiene entonces que A es diagonalizable si y sólo si $p_A(\lambda)$ se factoriza completamente en $\mathbb{K}$ en factores lineales. Es decir:*

$$p_A(\lambda) = c_A \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_A(\lambda_1)} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_A(\lambda_2)} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_A(\lambda_k)},$$

y además, para todo valor propio λ de A, se tiene que $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$.