Resumen Auxiliar 8
Transformaciones Lineales
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattass

Proposición 3.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. Se tiene entonces:*

1. $T(0) = 0 \in V$.
2. $T(-u) = -T(u)$.
3. *T es lineal si y sólo si* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall u_1, u_2 \in U$

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2).$$

Definición (Isomorfismo) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, diremos que es un **isomorfísmo** si T es biyectiva.

Además diremos que U y V son isomorfos si existe un isomorfísmo entre U y V, en cuyo caso lo denotaremos como $U \cong V$.

Definición (Núcleo) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos el **núcleo** de T como el conjunto:

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in U \mid T(x) = 0\}.$$

Definición (Imagen) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos la **imagen** de T como el conjunto:

$$\operatorname{Im} T = T(U) = \{v \in V \mid \exists u \in U : \ v = f(u)\}$$

Definición (Rango y nulidad) La dimensión de $\operatorname{Im} T$ se denomina el *rango* de la transformación T y se nota r. La dimensión del $\operatorname{Ker} T$ se llama **nulidad** y se suele denotar por la letra griega ν.

Teorema 3.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal entonces*

$$T \text{ es inyectiva} \iff \operatorname{Ker} T = \{0\}$$

Teorema 3.2. *Si $T : U \to V$ es inyectiva, entonces $\{u_i\}_{i=1}^k$ es $\ell.i.$ en $U \Rightarrow \{T(u_i)\}_{i=1}^k$ es l.i. en V.*

Teorema 3.3 (Núcleo-Imagen). *Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $\dim U < \infty$. Entonces:*

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$

Teorema 3.4. *Sea $T : U \to V$ aplicación lineal.*

1. *Si $\dim U = \dim V$ entonces*

$$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ epiyectiva} \iff T \text{ biyectiva.}$$

2. *Si $\dim U > \dim V$ T no puede ser inyectiva.*
3. *Si $\dim U < \dim V$ T no puede ser epiyectiva.*
4. *Como conclusión de (2) y (3)*

$$U \text{ isomorfo a } V \iff \dim U = \dim V.$$

Resumen

■**[Def] Matriz Representante de una Transformación Lineal:** Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}, \dim(U) = p, \dim(V) = q$, sean $\beta_U = \{u_1, ..., u_p\}, \beta_V = \{v_1, ..., v_q\}$ bases de U, V respectivamente. Consideremos $T : U \to V$ una transformación lineal. Definimos la matriz representante de T con respecto a las bases β_U, β_V como:

$$M_{\beta_V \beta_U}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$$

Donde los coeficientes vienen dados de la acción de T sobre la base β_U que luego se descompone en vectores $T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i, \quad 1 \le j \le p$

$$\begin{gathered} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{q1}v_q \\ T(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{q2}v_q \\ \vdots \\ T(u_p) = a_{1p}v_1 + a_{2p}v_2 + ... + a_{qp}v_q \end{gathered}$$

■**[Obs]:** Definir esta matriz nos permite trabajar con representantes matriciales y "olvidarnos" de la transformación como tal.

■**[Def] Espacio de Transformaciones Lineales:** Sean U, V e.v. sobre $\mathbb{K}$, de dimensiones $\dim(U) = p, \dim(V) = q$, se define

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V) = \{T : U \to V \mid T \text{ es trans. lineal}\}$$

Este espacio es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y cumple el isomorfismo:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U, V) \cong \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$$

■**[Prop]:** Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, los siguientes son equivalentes:

1. A es invertible
2. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, v \mapsto T_{A(v)} = Av$ es un isomorfismo
3. El conjunto $\{A_{\bullet j}\}_{j=1}^{n}$ es base de $\mathbb{K}^n$

■**[Def] Matriz de cambio de base:** Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ y sean $\beta = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ y $\beta' = \{v_i'\}_{i=1}^{n}$ dos bases de V. Se define la matriz de cambio de base como la matriz

$$P = P_{\beta\beta'} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Que coincide con la matriz representante de la identidad de V: $M_{\beta\beta'}(\mathrm{id}_V)$

■**[Obs:]** Gracias al hecho de que

$$\mathrm{id}_V \circ T \circ \mathrm{id}_U = T$$

podemos ver que se cumple:

$$M_{\tilde{\beta}'\tilde{\beta}}(T) = M_{\tilde{\beta}'\beta'}(\mathrm{id}_V) M_{\beta'\beta}(T) M_{\beta\tilde{\beta}}(\mathrm{id}_U)$$

que se puede visualizar en el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd} U, \tilde{\beta} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"'] & V, \tilde{\beta}' \\ U, \beta \arrow[r, "T"] & V, \beta' \arrow[u, "\mathrm{id}_V"'] \end{tikzcd}$$