Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-1 - Primavera 2024 – Álgebra Lineal

Auxiliar 8: Transformaciones Lineales

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar: Un poco de teoría

a) Considere $T : U \to U$ transformación lineal. Demuestre que:

   i) $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^2)$, $\mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)$

   ii) $T^2 = 0 \iff \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$

   iii) $T^2 = T \implies U = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$

b) Considere un espacio vectorial V que tiene a $\{u, v, w\}$ como base, y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T(u) = T(v) \neq 0$ y $T(w) = 3T(u) - T(v)$. Demuestre que la dimensión del núcleo de T es 2.

P2. Matraca (pero interesante)

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{Ker}(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

a) Obtenga base y dimensión de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$

b) Estudie inyectividad y sobreyectividad de T. ¿Qué se puede concluir con respecto a la biyectividad de T?

c) Encuentre la matriz A explícitamente

P3. Matraca de controles

Demuestre que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida a continuación, es una transformación lineal y repita los incisos a) y b) de la pregunta anterior

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y - z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$$

Resumen Auxiliar 8
Transformaciones Lineales
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattass ♡

Proposición 3.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. Se tiene entonces:*

1. $T(0) = 0 \in V$.
2. $T(-u) = -T(u)$.
3. *T es lineal si y sólo si* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall u_1, u_2 \in U$

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2).$$

Definición (Isomorfismo) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, diremos que es un **isomorfísmo** si T es biyectiva.

Además diremos que U y V son isomorfos si existe un isomorfísmo entre U y V, en cuyo caso lo denotaremos como $U \cong V$.

Definición (Núcleo) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos el **núcleo** de T como el conjunto:

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in U \mid T(x) = 0\}.$$

Definición (Imagen) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos la **imagen** de T como el conjunto:

$$\operatorname{Im} T = T(U) = \{v \in V \mid \exists u \in U : \ v = f(u)\}$$

Definición (Rango y nulidad) La dimensión de $\operatorname{Im} T$ se denomina el *rango* de la transformación T y se nota r. La dimensión del $\operatorname{Ker} T$ se llama **nulidad** y se suele denotar por la letra griega ν.

Teorema 3.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal entonces*

$$T \text{ es inyectiva} \iff \operatorname{Ker} T = \{0\}$$

Teorema 3.2. *Si $T : U \to V$ es inyectiva, entonces $\{u_i\}_{i=1}^k$ es $\ell.i.$ en $U \Rightarrow \{T(u_i)\}_{i=1}^k$ es l.i. en V.*

Teorema 3.3 (Núcleo-Imagen). *Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $\dim U < \infty$. Entonces:*

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$

Teorema 3.4. *Sea $T : U \to V$ aplicación lineal.*

1. *Si* $\dim U = \dim V$ *entonces*

$$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ epiyectiva} \iff T \text{ biyectiva.}$$

2. *Si* $\dim U > \dim V$ *T no puede ser inyectiva.*
3. *Si* $\dim U < \dim V$ *T no puede ser epiyectiva.*
4. *Como conclusión de (2) y (3)*

$$U \text{ isomorfo a } V \iff \dim U = \dim V.$$