

Resumen Auxiliar 8
Transformaciones Lineales
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattass

Proposición 3.1. Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal. Se tiene entonces:

1. $T(0) = 0 \in V$.
2. $T(-u) = -T(u)$.
3. T es lineal si y sólo si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall u_1, u_2 \in U$

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2).$$

DEFINICIÓN (ISOMORFISMO) Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal, diremos que es un **isomorfismo** si T es biyectiva.

Además diremos que U y V son isomorfos si existe un isomorfismo entre U y V , en cuyo caso lo denotaremos como $U \cong V$.

DEFINICIÓN (NÚCLEO) Sea una transformación lineal $T : U \rightarrow V$. Definimos el **núcleo** de T como el conjunto:

$$\text{Ker } T = \{x \in U \mid T(x) = 0\}.$$

DEFINICIÓN (IMAGEN) Sea una transformación lineal $T : U \rightarrow V$. Definimos la **imagen** de T como el conjunto:

$$\text{Im } T = T(U) = \{v \in V \mid \exists u \in U : v = f(u)\}$$

DEFINICIÓN (RANGO Y NULIDAD) La dimensión de $\text{Im } T$ se denomina el *rango* de la transformación T y se nota r . La dimensión del $\text{Ker } T$ se llama **nulidad** y se suele denotar por la letra griega ν .

Teorema 3.1. Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal entonces

$$T \text{ es inyectiva} \iff \text{Ker } T = \{0\}$$

Teorema 3.2. Si $T : U \rightarrow V$ es inyectiva, entonces $\{u_i\}_{i=1}^k$ es l.i. en $U \Rightarrow \{T(u_i)\}_{i=1}^k$ es l.i. en V .

Teorema 3.3 (Núcleo-Imagen). Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal, $\dim U < \infty$. Entonces:

$$\dim U = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T.$$

Teorema 3.4. Sea $T : U \rightarrow V$ aplicación lineal.

1. Si $\dim U = \dim V$ entonces

$$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ epiyectiva} \iff T \text{ biyectiva}.$$

2. Si $\dim U > \dim V$ T no puede ser inyectiva.
3. Si $\dim U < \dim V$ T no puede ser epiyectiva.
4. Como conclusión de (2) y (3)

$$U \text{ isomorfo a } V \iff \dim U = \dim V.$$