

1. **Asociatividad:** Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{qk}(\mathbb{K})$, entonces:

$$A(BC) = (AB)C \in \mathcal{M}_{mk}(\mathbb{K}).$$

2. **Distributividad con respecto a la suma:** Dadas $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), B, C \in \mathcal{M}_{ns}(\mathbb{K})$, entonces

$$A(B+C) = AB+AC \in \mathcal{M}_{ms}(\mathbb{K}).$$

De igual manera se tiene la distributividad por el otro lado.

DEFINICIÓN (MATRIZ INVERTIBLE) $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y sólo si existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$AB = BA = I. \tag{1.1}$$

Proposición 1.3. De existir una matriz B que satisfaga (1.1), esta es única. Por ende la notaremos $B = A^{-1}$.

DEFINICIÓN (POTENCIAS DE UNA MATRIZ) Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$

$$A^0 = I, \quad A^n = AA^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

DEFINICIÓN (TRASPUESTA) Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

Esto corresponde a intercambiar el rol de las filas y columnas. Más claramente, la primera fila de A^t es la primera columna de A y así sucesivamente.

Proposición 1.6.

- $(A^t)^t = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$
- $(AB)^t = B^tA^t.$
- Si $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es diagonal, entonces $D^t = D.$

Proposición 1.7.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertibles entonces:

- La inversa de A es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A.$
- El producto AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$
- $\forall n \geq 0, (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n,$
- A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$

DEFINICIÓN (ESPACIO VECTORIAL) Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$:

(EV1) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x.$

(EV2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x.$

(EV4) $1x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan **vectores** y los de $\mathbb{K}$, **escalares**.

DEFINICIÓN (SUBESPACIO VECTORIAL) Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:

- $\forall u, v \in U, u + v \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U.$

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U .

Proposición 2.1. Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}, U \neq \emptyset$, es subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2 \in U, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U.$$

Dado un conjunto fijo, $v_1, \dots, v_n \in V$ de vectores, definimos el conjunto de todas sus combinaciones lineales como sigue:

$$\{\{v_1, \dots, v_n\}\} = \{v \in V \mid v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Proposición 2.2. Sean V e.v. y $v_1, \dots, v_n \in V$. Entonces $\{\{v_1, \dots, v_n\}\}$ es un subespacio vectorial de V . Además es el s.e.v. más pequeño que contiene los vectores $v_1, \dots, v_n$. Es decir, si otro s.e.v U los contiene, entonces $\{\{v_1, \dots, v_n\}\} \subseteq U$.

Por ende, $\{\{v_1, \dots, v_n\}\}$ es llamado **subespacio vectorial generado** por $\{v_i\}_{i=1}^n$.

DEFINICIÓN Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependientes** (l.d.) si y solo si: existen escalares $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, es decir $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** (l.i.).

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, **generan** V si y sólo si:

$$\{\{v_1, \dots, v_n\}\} = V$$

o de manera equivalente:

$$\forall v \in V, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}, \quad \text{tal que} \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Resumen

■[Def] **Matriz elemental de permutación:** Es la matriz I_{pq} que se construye a partir de la identidad, permutando el orden de las filas p y q .
■[Prop]: Dadas $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{ns}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{qn}(\mathbb{K})$:

- $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas.
- BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas.

■[Def] **Matriz elemental de suma:** Es la matriz $E_{p,q}(\lambda)$ que se construye a partir de la identidad, añadiendo un $\lambda \in \mathbb{K}$ en la posición (p, q) con $p < q$.

■[Obs]: Al hacer el producto $E_{p,q}(\lambda)A$ se obtiene una matriz que difiere de A sólo en la fila q : Esta es ahora la suma de la fila p ponderada por λ y la fila q . Además cabe mencionar que la matriz $E_{p,q}(\lambda)$ es **triangular inferior**, que tiene unos en la diagonal, y además es **invertible**, con:

$$(E_{p,q}(\lambda))^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$$

■[Def] **Sistema de ecuaciones:** Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas consiste en el siguiente conjunto de ecuaciones en las variables $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

en donde los coeficientes a_{ij} y el lado derecho b_j son elementos del cuerpo $\mathbb{K}$.

■[Obs]: Definiendo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

la m -tupla (lado derecho) y la n -tupla de incógnitas:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Podemos escribir el problema matricialmente:

$$Ax = b$$

■[Prop]: Dada una matriz C invertible, entonces

$$a \in \mathbb{K}^n \text{ es solución de } Ax = b$$

$$\Leftrightarrow a \text{ es solución de } (CA)x = Cb$$

Con esto, podemos tomar $\tilde{A} = \left(\prod_j E_j\right)A$,

donde E_j es una matriz elemental de suma o permutación de filas y así, resolver el sistema original es equivalente a **escalonar** la matriz aumentada $(A \mid b)$. Esto pues $Ax = b \Rightarrow \tilde{A}x = \tilde{b}$ tienen el mismo conjunto de soluciones.

■[Obs] **Resumen cantidad de soluciones:**

	$b = 0$		$b \neq 0$	
Dim	$n \leq m$	$n > m$	$n \leq m$	$n > m$
Numero Soluciones	1, ∞	∞	0, 1, ∞	0, ∞

■[Def] **Algoritmo de Gauss:** En el caso de

estar trabajando con matrices cuadradas, el proceso de **escalonar** lleva este nombre, además:

■[Teo]: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces LSSE:

- A es invertible.
- $\forall b \in \mathbb{K}^n, Ax = b$ tiene solución única.
- $\prod_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} \neq 0$.

■[Cor]: Una matriz triangular superior es invertible si y sólo si todos sus elementos diagonales son distintos de cero. Por medio de la traspuesta, lo mismo se tiene para triangulares inferiores.

■[Alg] **Calculo de la inversa:** Si tenemos $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ podemos encontrar su inversa siguiendo el siguiente algoritmo:

- Adosamos la matriz identidad: $(A \mid I)$
- Por medio del algoritmo de Gauss, convertimos la matriz A en una matriz diagonal $(\tilde{A} \mid \tilde{I})$
- Multiplicamos por una matriz diagonal para obtener la identidad, la matriz adosada será entonces la matriz inversa: $(I \mid A^{-1})$

Resumen

■[Def] **Base:** Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base si y sólo si:

- $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto l.i.
- $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$

■[Prop] **Caracterización de base:** Dado un espacio vectorial $V, \mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ es una base si y sólo si $\forall v \in V, v$ se escribe de **manera única** como combinación lineal de los vectores del conjunto $\mathcal{B}$.

■[Obs]: Por convención el conjunto vacío $\emptyset$ es la base del espacio vectorial $\{0\}$. Esto pues por definición diremos que $\emptyset$ es l.i. y además el subespacio más pequeño que lo contiene es $\{0\}$.

■[Teo]: Si $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $\mathcal{B} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ que es base de V
■[Teo]: Supongamos que tenemos $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V y un conjunto arbitrario $X = \{u_i\}_{i=1}^m \subseteq V$. Si $m > n$, entonces el conjunto X es l.d.
■[Cor]: Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{u_i\}_{i=1}^m$ son bases de V , entonces $m = n$.

■[Def] **Dimensión:** Diremos que un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es de dimensión n (finita) si admite una base de cardinalidad n . En caso de que no exista una base finita, hablaremos de espacio vectorial de dimensión infinita.

Notaremos $\dim(V)$ al cardinal de una base ($\dim(V) = \infty$, si V no posee una base finita). En particular $\dim(\{0\}) = 0$.

■[Teo]: Sea V un e.v. con $\dim(V) = n$ finita,

- Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es l.i. entonces $\{v_i\}_{i=1}^n$ es base.
- Sea U un s.e.v. de V , luego $\dim(U) \leq \dim(V)$. Más aún se tiene que

$$\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$$

■[Teo] **Completación de base:** Dado V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ y un conjunto de vectores l.i. $X = \{v_1, \dots, v_r\}, r < n$, entonces existen vectores $v_{r+1}, \dots, v_n$ tales que el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V .

■[Def] **Suma de subespacios vectoriales:**

Sean U, W subespacios de V , definimos su suma como sigue:

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, u \in U, w \in W\}$$

■[Prop]: Sean U, W s.e.v. de V , entonces:

- $U + W$ es s.e.v. de V
- $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$

■[Def] **Suma directa:** Sea un espacio vectorial V y dos subespacios vectoriales U, W de V . Diremos que el subespacio $Z = U + W$ es **suma directa** de U y W , notado $U \oplus W = Z$, si $\forall v \in Z, v$ se escribe de manera única como:

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W$$

En el caso de que V se suma directa de U y W , diremos que estos últimos son **suplementarios**.

■[Prop] **Caracterización suma directa:** Dado V e.v. y U, W, Z s.e.v. de V , entonces

$$Z = U \oplus W \Leftrightarrow (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$

■[Teo]: Si $V = U \oplus W$ y V es de dimensión finita, entonces

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

■[Teo]: Supongamos que $V = U + W$, entonces

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$