Auxiliar 6: Repaso C1

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar: Sistemas de ecuaciones

Considere $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, y el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ x + \alpha y + z &= \beta \\ \alpha x + 9y + z &= \gamma \end{aligned}$$

Encuentre condiciones en α, β y γ para que:

a) El sistema no tenga solución

b) El sistema tenga infinitas soluciones

c) La matriz asociada al sistema sea invertible

d) El sistema tenga solución única, exprese además la solución en función de α, β y γ

P2. Matraca: Invertibilidad

Determine, de existir, la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

P3. De controles: Independencia, dimensión y suma

Considere $V = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 = 2a_1,\ a_2 = 2a_3 \right\}$ y

$U = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0,\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \right\}$

a) Pruebe que U y V son s.e.v. de $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Encuentre una base y determine la dimensión de U, V, $U \cap V$ y $U + V$.

c) ¿Es $U + V$ suma directa?

Resumen Auxiliar 2
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

1. **Asociatividad:** *Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{qs}(\mathbb{K})$, entonces:*

$$A(BC) = (AB)C \in \mathcal{M}_{ms}(\mathbb{K}).$$

2. **Distributividad con respecto a la suma**: *Dadas $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), B, C \in \mathcal{M}_{ns}(\mathbb{K})$, entonces*

$$A(B + C) = AB + AC \in \mathcal{M}_{ms}(\mathbb{K}).$$

De igual manera se tiene la distributividad por el otro lado.

Definición (Matriz invertible) $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y sólo si existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$AB = BA = I. \qquad (1.1)$$

Proposición 1.3. *De existir una matriz B que satisfaga (1.1), esta es única. Por ende la notaremos $B = A^{-1}$.*

Definición (Potencias de una matriz) Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$

$$A^0 = I, \quad A^n = AA^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Definición (Traspuesta) Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

Esto corresponde a intercambiar el rol de las filas y columnas. Más claramente, la primera fila de A^t es la primera columna de A y así sucesivamente.

Proposición 1.6.
1. $(A^t)^t = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. *Si $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es diagonal, entonces $D^t = D$.*

Proposición 1.7.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertibles entonces:

1. *La inversa de A es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *El producto AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. $\forall n \geq 0$, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
4. *A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Resumen

■**[Def] Matriz elemental de permutación:** Es la matriz I_{pq} que se construye a partir de la identidad, permutando el oden de las filas p y q.
■**[Prop]**: Dadas $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{ns}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{qn}(\mathbb{K})$:
- $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las **filas** p y q permutadas.
- BI_{pq} corresponde a la matriz B con las **columnas** p y q permutadas.

■**[Def] Matriz elemental de suma:** Es la matriz $E_{p,q}(\lambda)$ que se construye a partir de la identidad, añadiendo un $\lambda \in \mathbb{K}$ en la posición (p, q) con $p < q$.
■**[Obs]:** Al hacer el producto $E_{p,q}(\lambda)A$ se obtiene una matriz que difiere de A sólo en la fila q: Esta es ahora la **suma** de la fila p **ponderada** por λ y la fila q. Además cabe mencionar que la matriz $E_{p,q}(\lambda)$ es **triangular inferior**, que tiene unos en la diagonal, y además es **invertible**, con:

$$\left(E_{p,q}(\lambda)\right)^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$$

■**[Def] Sistema de ecuaciones:** Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas consiste en el siguiente conjunto de ecuaciones en las variables $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

en donde los coeficientes a_{ij} y el lado derecho b_j son elementos del cuerpo $\mathbb{K}$.
■**[Obs]:** Definiendo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

la m-tupla (lado derecho) y la n-tupla de incógnitas:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Podemos escribir el problema matricialmente:

$$Ax = b$$

■**[Prop]:** Dada una matriz C invertible, entonces

$$a \in \mathbb{K}^n \text{ es solución de } Ax = b$$
$$\Leftrightarrow a \text{ es solución de } (CA)x = Cb$$

Con esto, podemos tomar $\tilde{A} = \left(\prod_j E_j\right) A$, donde E_j es una matriz elemental de suma o permutación de filas y así, resolver el sistema original es equivalente a **escalonar** la matriz aumentada $(A \mid b)$. Esto pues $Ax = b$ y $\tilde{A}x = \tilde{b}$ tienen el mismo conjunto de soluciones.
■**[Obs] Resumen cantidad de soluciones:**

	$b = 0$		$b \neq 0$	
Dim	$n \leq m$	$n > m$	$n \leq m$	$n > m$
Numero Soluciones	$1, \infty$	∞	$0, 1, \infty$	$0, \infty$

■**[Def] Algoritmo de Gauss:** En el caso de estar trabajando con matrices cuadradas, el proceso de **escalonar** lleva este nombre, además:
■**[Teo]:** Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces LSSE:
1.- A es invertible.
2.- $\forall b \in \mathbb{K}^n, Ax = b$ tiene solución única.
3.- $\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} \neq 0$.
■**[Cor]:** Una matriz triangular superior es invertible si y sólo si todos sus elementos diagonales son distintos de cero. Por medio de la traspuesta, lo mismo se tiene para triangulares inferiores.
■**[Alg] Calculo de la inversa:** Si tenemos $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ podemos encontrar su inversa siguiendo el siguiente algoritmo:
1.- Adosamos la matriz identidad: $(A \mid I)$
2.- Por medio del algoritmo de Gauss, convertimos la matriz A en una matriz diagonal $(\tilde{A} \mid \tilde{I})$
3.- Multplicamos por una matriz diagonal para obtener la identidad, la matriz adosada será entonces la matriz inversa: $(I \mid A^{-1})$

Resumen Auxiliar 4
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

Definición (Espacio vectorial) Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in K, x, y \in V$:

(EV1) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$.

(EV2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.

(EV4) $1\ x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan **vectores** y los de $\mathbb{K}$, **escalares**.

Definición (Subespacio vectorial) Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \phi$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:

1. $\forall u, v \in U, \ u + v \in U$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \ \lambda u \in U$.

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Proposición 2.1. *Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. $U \neq \phi$, es subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \ \forall u_1, u_2 \in U, \ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U.$$

Dado un conjunto fijo, $v_1, ..., v_n \in V$ de vectores, definimos el conjunto de todas sus combinaciones lineales como sigue:

$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = \{v \in V \mid v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Proposición 2.2. *Sean V e.v. y $v_1, ..., v_n \in V$. Entonces $\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$ es un subespacio vectorial de V. Además es el s.e.v. más pequeño que contiene los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Es decir, si otro s.e.v U los contiene, entonces $\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle \subseteq U$.*
Por ende, $\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$ es llamado **subespacio vectorial generado** *por $\{v_i\}_{i=1}^n$.*

Definición Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependientes** ($\ell.d.$) si y solo si: existen escalares $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, **no** todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, es decir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, ..., n$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** ($\ell.i.$).

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, **generan** V si y sólo sí:

$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = V$$

o de manera equivalente:

$$\forall v \in V, \ \exists\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}, \quad \text{tal que} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Resumen

■**[Def] Base:** Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base si y sólo si:
(1) $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto l.i.
(2) $V = \langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle$
■**[Prop] Caracterización de base:** Dado un espacio vectorial $V, \mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ es una base sí y sólo si $\forall v \in V, v$ se escribe de **manera única** como combinación lineal de los vectores del conjunto $\mathcal{B}$.
■**[Obs]:** Por convención el conjunto vacío $\varnothing$ es la base del espacio vectorial $\{0\}$. Esto pues por definición diremos que $\varnothing$ es l.i. y además el subespacio más pequeño que lo contiene es $\{0\}$.
■**[Teo]:** Si $X = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $\mathcal{B} = \left\{v_{i_1}, ..., v_{i_s}\right\}$ que es base de V
■**[Teo]:** Supongamos que tenemos $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V y un conjunto arbitrario $X = \{w_i\}_{i=1}^m \subseteq V$. Si $m > n$, entonces el conjunto X es l.d.
■**[Cor]:** Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ y $\{u_i\}_{i=1}^m$ son bases de V, entonces $m = n$.
■**[Def] Dimensión:** Diremos que un spacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es de dimensión n (finita) si admite una base de cardinalidad n. En caso de que no exista una base finita, hablaremos de espacio vectorial de dimensión infinita. Notaremos $\dim(V)$ al cardinal de una base ($\dim(V) = \infty$, si V no posee una base finita). En particular $\dim(\{0\}) = 0$.
■**[Teo]:** Sea V un e.v. con $\dim(V) = nf$ finita,
(1) Si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es l.i. entonces $\{v_i\}_{i=1}^n$ es base.
(2) Sea U un s.e.v. de V, luego $\dim(U) \leq \dim(V)$. Más aún se tiene que

$$\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V$$

■**[Teo] Completación de base:** Dado V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $\dim(V) = n$ y un conjunto de vectores l.i. $X = \{v_1, ..., v_r\}, r < n$, entonces existen vectores $v_{r+1}, ..., v_n$ tales que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de V.

■**[Def] Suma de subespacios vectoriales:** Sean U, W subespacios de V, definimos su suma como sigue:

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, u \in U, w \in W\}$$

■**[Prop]:** Sean U, W s.e.v. de V, entonces:
(1) $U + W$ es s.e.v. de V
(2) $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$
■**[Def] Suma directa:** Sea un espacio vectorial V y dos subespacios vectoriales U, W de V. Diremos que el subespacio $Z = U + W$ es **suma directa** de U y W, notado $U \oplus W = Z$, si $\forall v \in Z, v$ se escribe de manera única como:

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in W$$

En el caso de que V se suma directa de U y W, diremos que estos últimos son **suplementarios**.
■**[Prop] Caracterización suma directa:** Dado V e.v. y U, W, Z s.e.v. de V, entonces

$$Z = U \oplus W \iff (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$

■**[Teo]:** Si $V = U \oplus W$ y V es de dimensión finita, entonces

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

■**[Teo]:** Supongamos que $V = U + W$, entonces

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$