Auxiliar 4: Subespacios Vectoriales

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar: Subespacios vectoriales

Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales:

a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} a+b+c+d=0 \\ a-b+c-d=0 \end{array} \right\}$

b) $U_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) | A_{1,1} + A_{2,2} + A_{1,3} = 0\}$

c) $U_3 = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) : M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$

d) $U_4 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | a+b=0, c+d=0\}$

e) $U_5 = \{M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$ con $A \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

P2. De Controles: Dependencia lineal y Generadores

a) Sea $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto linealmente independiente de vectores. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - av_2\}$ es linealmente independiente.

b) Encuentre los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$ es generador de $\mathbb{R}^4$

c) Para S y T subespacios vectoriales de V, demuestre que:

S $\cup T$ es subespacio vectorial de $V \iff S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Hint: Pruebe que: $s \in S, t \in T \implies s + t \in S \cup T \implies t \in S$ o $s \in T$.

Resumen Auxiliar 4
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas ♡♡

Definición (Espacio vectorial) Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in K, x, y \in V$:

(EV1) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$.

(EV2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.

(EV4) $1\ x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan **vectores** y los de $\mathbb{K}$, **escalares**.

Definición (Subespacio vectorial) Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \phi$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:

1. $\forall u, v \in U,\ u + v \in U$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U,\ \lambda u \in U$.

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Proposición 2.1. *Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. $U \neq \phi$, es subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ \forall u_1, u_2 \in U,\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U.$$

Dado un conjunto fijo, $v_1, ..., v_n \in V$ de vectores, definimos el conjunto de todas sus combinaciones lineales como sigue:

$$\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle = \{v \in V \mid v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Proposición 2.2. *Sean V e.v. y $v_1, ..., v_n \in V$. Entonces $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ es un subespacio vectorial de V. Además es el s.e.v. más pequeño que contiene los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Es decir, si otro s.e.v U los contiene, entonces $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle \subseteq U$.*

Por ende, $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ es llamado **subespacio vectorial generado** *por $\{v_i\}_{i=1}^n$.*

Definición Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependientes** ($\ell.d.$) si y solo si: existen escalares $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, **no** todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, es decir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i = 1, ..., n$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** ($\ell.i.$).

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$, **generan** V si y sólo sí:

$$\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle = V$$

o de manera equivalente:

$$\forall v \in V,\ \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}, \quad \text{tal que} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$