Resumen Auxiliar 4
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

DEFINICIÓN (ESPACIO VECTORIAL) Dado un grupo abeliano $(V,+)$ y un cuerpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si la ley de composición externa satisface $\forall\lambda,\beta\in K, x,y\in V$:

(EV1) $(\lambda+\beta)x=\lambda x+\beta x$.

(EV2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

(EV3) $\lambda(\beta x)=(\lambda\beta)x$.

(EV4) $1\,x=x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan **vectores** y los de $\mathbb{K}$, **escalares**.

DEFINICIÓN (SUBESPACIO VECTORIAL) Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U\neq\phi$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:

1. $\forall u,v\in U,\ u+v\in U$
2. $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall u\in U,\ \lambda u\in U$.

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Proposición 2.1. *Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. $U\neq\phi$, es subespacio vectorial (s.e.v) de V si y sólo si:*

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K},\ \forall u_1,u_2\in U,\ \lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in U.$$

Dado un conjunto fijo, $v_1,...,v_n\in V$ de vectores, definimos el conjunto de todas sus combinaciones lineales como sigue:

$$\langle\{v_1,...,v_n\}\rangle=\{v\in V\mid v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i,\lambda_i\in\mathbb{K}\}.$$

Proposición 2.2. *Sean V e.v. y $v_1,...,v_n\in V$. Entonces $\langle\{v_1,\dots,v_n\}\rangle$ es un subespacio vectorial de V. Además es el s.e.v. más pequeño que contiene los vectores $v_1,\dots,v_n$. Es decir, si otro s.e.v U los contiene, entonces $\langle\{v_1,\dots,v_n\}\rangle\subseteq U$.*

Por ende, $\langle\{v_1,\dots,v_n\}\rangle$ es llamado **subespacio vectorial generado** *por $\{v_i\}_{i=1}^n$.*

DEFINICIÓN Sea $\{v_i\}_{i=1}^n\subseteq V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependientes** ($\ell.d.$) si y solo si: existen escalares $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$, **no** todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i=0$. En caso contrario, es decir $\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i=0\Rightarrow\lambda_i=0\ \forall i=1,...,n$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** ($\ell.i.$).

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $\{v_1,...,v_n\}\subseteq V$, **generan** V si y sólo sí:

$$\langle\{v_1,...,v_n\}\rangle=V$$

o de manera equivalente:

$$\forall v\in V,\ \exists\{\lambda_i\}_{i=1}^n\subseteq\mathbb{K},\quad\text{tal que}\quad v=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i.$$