Guía 1: Operaciones con Matrices

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Propuesto Aux 1: Producto de matrices

Dadas las matrices

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Calcule

a) $R(\alpha)R(-\alpha)$
b) $R(-\alpha)R(\alpha)$
c) AB
d) BA
e) $R(\theta)A$
f) $AR(\theta)$

¿Qué debo hacer y tener en cuenta al realizar estos ejercicios?
R: Saber multiplicar matrices.

Para eso,

1. Debo comprobar que el tamaño de las matrices involucradas sea correcto.
2. Conocer la operatoria, cada posición i, j de la matriz que resulta de esta multiplicación, es la suma de los productos de los coeficientes de la fila i de la primera matriz con los de la columna j de la segunda.
3. ¿Qué conclusiones podemos sacar sobre el producto particular de estas matrices?

P2. Propiedades de matrices

Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ diagonal con $d_1, \ldots, d_n$ distintos y $A, B, M, S, D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

a) Pruebe que si $MD = DM$ entonces M es diagonal.

b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$

c) Sea S invertible tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

Preguntas que pueden ayudar a resolver este ejercicio:

1. ¿Qué pasa cuando multiplico una matriz diagonal por la izquierda de una matriz cualquiera? ¿Cuando lo hago por la derecha?
2. ¿Puedo intercalar identidades en el producto? De alguna forma que ayude....
3. ¿Qué debo hacer para probar que dos cosas conmutan? ¿De que forma me pueden ayudar los resultados probados en los items anteriores?

P3. Potencias en matrices

Considere la sucesión $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, y la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Preguntas que pueden ayudar a resolver este ejercicios

1. Tengo que demostrar algo para todo $n \in \mathbb{N}$.... ¿Me servirá algo de introducción al álgebra?
2. ¿Qué tiene de particular esta sucesión?¿Es conocida?
3. ¿Cómo se definen las potencias en matrices?

P4. Simetría, Unicidad, Idempotencia e Invertibilidad

Una matriz A se dirá *simétrica* si $A^t = A$, *unitaria* si $A^tA = I$ e *idempotente* si $A^2 = A$. En base a las definiciones anteriores, dadas $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, demuestre que:

a) Si A es simétrica e invertible y B es simétrica, entonces $C^t(A^{-1} + B)C$ es simétrica

b) Si A es unitaria entonces es invertible

c) Si A y B son unitarias entonces AB es unitaria

d) Si A es idempotente y $Q = I - A$ entonces Q es idempotente

e) Si A es idempotente entonces $A^m = A, \forall m \in N$

f) Si $A = AB$ y $B = BA$ entonces A y B son idempotentes
Hint: Utilice la hipótesis y asocie adecuadamente

g) Si $A^3 + A^2B + AB - I = 0$ entonces A es invertible. Además entregue una formula explicita para A^{-1}

h) **EXTRA** Para $A = \mathbf{1}_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, es decir, la matriz $1'$s en $n \times n$ componentes, demuestre que: $\forall a, b \in \mathbb{R}, (I + aA)(I + bA) = I + (a + b + nab)A$
Hint: Calcule una coordenada cualquiera de A^2 para encontar una relación entre A^2 y A considerando que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Preguntas que pueden ayudar a resolver este ejercicios

1. ¿Qué debo demostrar para ver que una matriz es simétrica? ¿Puedo asociar esto a coeficientes específicos de la matriz y su traspuesta?

2. Considerando que estamos trabajando con matrices cuadradas ¿Qué debo demostrar para ver que una matriz es invertible?

3. ¿Qué debo demostrar para ver que una matriz es idempotente o unitaria?

P5. Propuesto: Traza

Se define la función Traza según Traza : $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donde $A \longmapsto T(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$, es decir, la Traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal. demuestre que

a) $\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$.

b) $\text{Traza}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \text{Traza}(A)$.

c) $\text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(B \cdot A)$.

d) Si $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible entonces $\text{Traza}(A) = \text{Traza}(P \cdot A \cdot P^{-1})$.

e) Muestre que $\text{Traza}(A \cdot A^T) \geq 0$

f) $A = 0 \iff \text{Traza}(A \cdot A^T) = 0$.

¿Y cómo hago esto?

1. Con mucho cuidado
2. Verifique la definición de Traza y trabaja con cuidado las sumatorias
3. ¿Cómo se relacionan las coordenadas de A y A^t?
4. Si una parte no es directa recuerda mirar partes anteriores
5. ¿Cómo se ve un término en específico de AA^t? ¿Cómo se ven los términos que me interesan si estoy trabajando con la función Traza?
6. ¿Qué puedo decir sobre los términos de una suma si estos son mayores o iguales a 0 y la suma vale 0?