Auxiliar 2: A^t, A^{-1} y A^k con $k \in \mathbb{N}$

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Ignacio Romero Orrego, Ignacio Dagach Abugattas

P1. Para comenzar

a) Considere A y B matrices de $n \times n$ a coeficientes reales tales que *conmutan*, es decir $AB = BA$. Demuestre que:

  i) A^t y B^t conmutan
  ii) A^2 y B^2 conmutan
  iii) Si A es invertible, entonces A^{-1} y B conmutan

b) Una matriz A se dirá *simétrica* si $A^t = A$ y *antisimétrica* si $A^t = -A$. Demuestre que:

  i) $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica
  ii) Toda matriz cuadrada a valores reales puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica

P2. Matraca

Considere $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz *idempotente* ($P^2 = P$). Defina ahora $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ según $Q = I - P$ para demostra que:

a) $Q^3 = Q$

b) Si P es invertible entonces $P = I$ y $Q = 0$

P3. De Controles

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que $(I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{m-1}) = I - A^m$, para todo entero $m \geq 1$.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^m = 0$ para algún entero $m \geq 1$. Demuestre que $(I - A)$ e $(I + A)$ son invertibles, y calcule sus inversas.

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que $A^5 - A = 0$. Encuentre A^{-1}.

d) Considere $A = \mathbf{1}_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, es decir, la matriz $1'$s en $n \times n$ componentes. Encuentre un real k tal que $(I - A)^{-1} = I + kA$

Resumen Auxiliar 2
Álgebra lineal - MA1102-1 - Primavera 2024
Ignacio Romero Orrego & Ignacio Dagach Abugattas

1. **Asociatividad:** *Si* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{qs}(\mathbb{K})$, *entonces:*

$$A(BC) = (AB)C \in \mathcal{M}_{ms}(\mathbb{K}).$$

2. **Distributividad con respecto a la suma**: *Dadas* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), B, C \in \mathcal{M}_{ns}(\mathbb{K})$, *entonces*

$$A(B + C) = AB + AC \in \mathcal{M}_{ms}(\mathbb{K}).$$

De igual manera se tiene la distributividad por el otro lado.

Definición (Matriz invertible) $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y sólo si existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$AB = BA = I. \tag{1.1}$$

Proposición 1.3. *De existir una matriz B que satisfaga (1.1), esta es única. Por ende la notaremos $B = A^{-1}$.*

Definición (Potencias de una matriz) Dada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$

$$A^0 = I, \quad A^n = AA^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Definición (Traspuesta) Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

Esto corresponde a intercambiar el rol de las filas y columnas. Más claramente, la primera fila de A^t es la primera columna de A y así sucesivamente.

Proposición 1.6.

1. $(A^t)^t = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. *Si* $D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ *es diagonal, entonces* $D^t = D$.

Proposición 1.7.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ *invertibles entonces:*

1. *La inversa de* A *es invertible y* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *El producto* AB *es invertible y* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $\forall n \geq 0,\ (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
4. A^t *es invertible y* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.