

## Respuestas a las preguntas de la lectura 13

1. La distancia del punto al origen en  $\mathbb{R}^2$ .
2. Porque si tuviera, tendría que ser  $r = 0$  pero serviría cualquier  $\theta$  y no se tendría una representación única. El argumento de  $z = (a, b)$  es un número  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  tal que  $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$  si  $a \neq 0$  (si  $a = 0$ ,  $\arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}$ ). Con esa igualdad se puede calcular, considerando el cuadrante en el que se encuentra el complejo.
3. Para  $z = 0$  no se tienen coordenadas polares y un complejo es 0 si sus partes real e imaginaria lo son.
4. Con la relación  $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$  como se comentó en la pregunta 2. Si tenemos  $(r, \theta)$ , el complejo es  $(a, b) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$ . Para  $(r, \theta) = (2, 3)$  habría que ubicarse a 2 unidades del origen en el eje  $OX$  positivo y luego rotar ese punto en 3 radianes antihorario con respecto al origen (quedaría un poco antes de llegar al punto  $(-2, \pi)$  en el segundo cuadrante).
5. Como se dijo antes,  $|z|$  es la distancia al origen y  $\arg(z)$  el ángulo que se forma entre el eje  $OX$  y el segmento que une  $z$  con  $O$ , luego se ubica el punto en el eje  $OX$  a  $|z|$  unidades de  $O$  y luego se rota  $\arg(z)$  antihorario en torno a  $O$ .
6. Si se factoriza por el módulo se obtiene  $z = a + ib = |z| \left( \frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$ , donde  $\left( \frac{a}{|z|} \right)^2 + \left( \frac{b}{|z|} \right)^2 = 1$ , es decir, el punto  $\left( \frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|} \right)$  está en la circunferencia unitaria y por lo tanto  $\left( \frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|} \right) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ , para algún  $\theta \in [0, 2\pi)$ . La conclusión es que si uno factoriza, obtiene un punto de la forma  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  y podría obtener fácilmente  $\theta$  si se obtienen números conocidos como en el ejemplo.
7. Se usa la notación por que tiene las propiedades del producto de potencias con igual base. La base  $e$  es coherente con el desarrollo en serie de potencias de  $e^x$ , si se reemplaza  $x$  por  $ix$  y se compara la serie con la de  $\cos(x) + i \sin(x)$ . Esto lo verán al final del curso de cálculo diferencial.
8.  $e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}}$ .
9. Se verifica que como  $e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$ , entonces  $e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$  y se tiene la igualdad módulo  $2\pi$ .
10. Como se argumentó en la pregunta anterior.
11. Si  $\omega = z^{-1}$  se tiene que  $0 = \arg(1) = \arg(z\omega) = \arg(z) + \arg(z^{-1}) \bmod 2\pi$  y por lo tanto,  $\arg(z^{-1}) = -\arg(z) \bmod 2\pi$ . Con eso se puede iterar para  $k < 0$  en (I).
12. Como  $\bar{z}z = |z|^2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $0 = \arg(\bar{z}z) = \arg(\bar{z}) + \arg(z) \bmod 2\pi$  y por lo tanto  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2\pi$  pues  $-\arg(z) \in (-2\pi, 0]$ . Por otra parte, como  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  se tiene que  $\arg(z^{-1}) = \arg(\bar{z})$  y  $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ . Luego, la forma polar de  $z^{-1}$  es  $z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{i \arg(\bar{z})} = \frac{1}{|z|} e^{i(2\pi - \arg(z))} = \frac{1}{|z|} e^{-i \arg(z)}$ .
13. Se obtiene de  $i^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$ .

14. Según la formula las raíces cuadradas de 1 son  $\omega_k = \sqrt[1]{1}e^{i(\arg(1)+2k\pi)/2} = e^{ik\pi}$ ,  $k = 0, 1$ .  
Para  $k = 0$  obtenemos 1 y para  $k = 1$  obtenemos  $-1$ .
15. Para  $k = n$  se tiene que  $e^{i\theta_0/n} = e^{i\theta_0/n+2\pi}$  pues  $e^{i2\pi} = 1$  y lo mismo ocurre con  $k = n + m$ ,  
se obtiene  $\omega_k = \omega_m$ . Son distintas pues los argumentos son todos distintos pues son  
distintos números en  $[0, 2\pi)$ .
16. Basta notar que  $r_0 = 1$ ,  $\theta_0 = 0$ , y que  $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$ .