Decimotercera sesión

Lectura (30 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, respondiendo las preguntas al margen para verificar si está comprendiendo lo leído. Además, dé un ejemplo de un complejo z tal que z^{-1} esté dentro del círculo unitario y otro de un complejo $z \neq \pm 1$ tal que $z^4 = 1$.

Definición 10.12 (Argumento y Coordenadas Polares) Las coordenadas polares de $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$ son el par $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:

- r es el módulo[1] de z, $|z|$.
- θ es el ángulo que se forma entre el eje OX y el segmento que une z con el origen O. Se llama el **argumento** de z y se anota $\arg(z)$.[2]

Destacamos que, para[3] $z, w \neq 0, z = w$ si y sólo si $|z| = |w|$ y $\arg(z) = \arg(w)$. La relación entre las coordenadas polares y las usuales, las cartesianas, es la siguiente. Sean (a, b) las coordenadas cartesianas de z y (r, θ) sus coordenadas polares. Entonces[4],

$$a = r \cos \theta \quad \text{y} \quad b = r \operatorname{sen} \theta.$$

La razón de manipular dos sistemas de coordenadas para $\mathbb{R}^2$ es que en el primero, las coordenadas cartesianas, son más amigables para operar con la adición $+$, mientras que en el segundo, las coordenadas polares, son más cómodas para operar con $\cdot$ y calcular inversos multiplicativos.

Definición 10.13 (Forma polar) Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. La expresión $|z| e^{i \arg(z)}$ se llama la **forma polar** de z.

Ejemplo: Veamos la forma polar de algunos complejos.

- Para $\theta \in [0, 2\pi)$, sea $z = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$. Entonces, $|z|^2 = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$, por lo que $|z| = 1$. Claramente, su argumento es θ. Luego, $z = e^{i\theta}$.[5]
- Calculemos la forma polar del complejo $z = 2 + 2i$. Primero observamos que $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Luego, $z = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ de modo que el argumento es $\pi/4$. Así, $2 + 2i = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}$.[6]

La utilidad de la forma polar se debe en gran medida a la propiedad siguiente:

Proposición 10.14 Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.[7]

Dem. Por definición del producto en $\mathbb{C}$,

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta, \operatorname{sen} \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{sen} \alpha).$$

Al lado derecho aparecen las fórmulas trigonométricas para la suma de ángulos: $\cos \alpha \cos \beta -$ $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos(\alpha + \beta)$ y $\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. De este modo, el lado derecho es $e^{i(\alpha+\beta)}$. $\square$

[1] ¿Qué representa geométricamente el módulo de un complejo?

[2] ¿Por qué O no tiene coordenadas polares? ¿Cómo se calcula el argumento de un complejo?

[3] ¿ Qué pasa para $z = 0$?

[4] Si tenemos a y b, cómo calculamos θ? ¿Si tenemos (r, θ), cuál es el complejo en forma cartesiana? ¿Si $(r, \theta) = (2, 3)$, puedo estimar la ubicación el complejo?

[5] ¿Cómo se ve esto gráficamente?

[6] ¿Siempre hay que factorizar en la forma cartesiana por el módulo para obtener el argumento?

[7] ¿Por qué se usa la notación con exponencial? ¿por qué la base e?

¿Hay alguna relación entre $\arg(z), \arg(w)$ y $\arg(z \cdot w)$, para $z, w \in \mathbb{C}$? Lo anterior sugiere que sí pues nos dice que al multiplicar los complejos $z = e^{i\alpha}$ y $w = e^{i\beta}$ el resultado es el complejo $zw = e^{i(\alpha+\beta)}$. De aquí, podemos concluir que si $\alpha + \beta \in [0, 2\pi)$ entonces $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$. Pero, puede ocurrir que[8] $\alpha + \beta \notin [0, 2\pi)$ cuando $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. De modo que, para z y w arbitrarios, lo que se cumple es:[9] $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \text{ mód } 2\pi$.

[8] ¿Ejemplo?

[9] ¿Se verifica para el ejemplo que dí?

Proposición 10.15 Para $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, k \in \mathbb{Z}$ y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que:

(I) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \text{ mód } 2\pi$.

(II) $\arg z^k = k \cdot \arg z \text{ mód } 2\pi$.

(III) Fórmula de De Moivre: $\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{i(k\theta)}$.

(IV) $\arg(\bar{z}) = 2\pi - \arg(z)$.

(V) $z^{-1} = (1/|z|)e^{i\arg(\bar{z})} = (1/|z|)e^{-i\arg(z)}$.

Dem. Ya vimos que la primera afirmación es correcta[10]. La segunda se obtiene al aplicar la primera de manera iterada[11]. La tercera es consecuencia de las anteriores, pues $\left|e^{i\theta}\right| = 1$y $\arg\left(\left(e^{i\theta}\right)^k\right) = k\theta \text{ mód } 2\pi$. La justificación de las dos restantes se propone como ejercicio.[12]

[10] ¿Cómo?

[11] ¿Y para $k < 0$?

[12] ¡A trabajar!

Del resultado anterior, es fácil ver[13] que para todo $n \in \mathbb{Z}$,

[13] ¿Cómo?

$$i^n = \begin{cases} +1, & \text{si } n \equiv_4 0, \\ +i, & \text{si } n \equiv_4 1, \\ -1, & \text{si } n \equiv_4 2, \\ -i, & \text{si } n \equiv_4 3, \end{cases}$$

Interpretación geométrica del producto

Ahora estamos en pie de dar una interpretación geométrica al producto de complejos. Sean $z = re^{i\theta}, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

- Si $w = \alpha \in \mathbb{R}, w > 0$, entonces $z \cdot w = (\alpha r)e^{i\theta}$, es decir $z \cdot w$ es un estiramiento ($w > 1$) o contracción ($w < 1$) de z en un factor α.
- Si $w = e^{i\varphi}$, entonces $z \cdot w = re^{i(\theta+\varphi)}$, es decir $z \cdot w$ es una rotación de z en un ángulo $\varphi = \arg(w)$.
- De este modo, si $w = |w|e^{i\arg(w)}$, entonces $z \cdot w$ representa un estiramiento o contracción de z en un factor $|w|$, además de rotarlo en un ángulo $\arg(w)$.

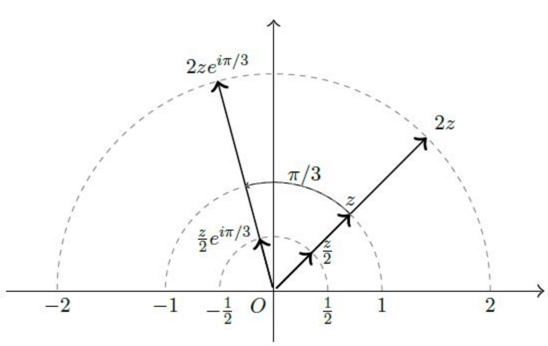

Figura 22: Efecto de multiplicar $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ por $w \in \left\{2, \frac{1}{2}, 2e^{i\pi/3}, \frac{1}{2}e^{i\pi/3}\right\}$.

La Figura 22 muestra gráficamente el efecto de distintas combinaciones de rotaciones, estiramientos y contracciones de un complejo z por otro w.

10.3 Raíces de un complejo

Definición 10.16 (Raíces de un complejo) Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raíz n-ésima de w si $z^n = w$.

Definición 10.17 (Raíces n-ésimas de la unidad) Las raíces n-ésimas de 1, se llaman las raíces n-ésimas de la unidad

Proposición 10.18 Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Entonces, la ecuación $z^n = w$ tiene exactamente n soluciones $w_0, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ donde $w_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\arg(w)+2k\pi)/n}$.[14]

Dem. Para encontrar las soluciones z, escribimos $z = re^{i\theta}$ y $w = r_0 e^{i\theta_0}$, con $r, r_0 > 0$ y $\theta, \theta_0 \in [0, 2\pi)$. Con esto la ecuación queda: $r^n \left(e^{i\theta}\right)^n = r_0 e^{i\theta_0}$. Sabemos que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ y que la igualdad se tiene si y sólo si $r^n = r_0$ y $e^{in\theta} = e^{i\theta_0}$. Entonces, z es solución si y sólo si $r^n = r_0$ y $e^{in\theta} = e^{i\theta_0}$. La primera ecuación define $r = \sqrt[n]{r_0}$. La segunda ecuación se cumple cada vez que $n\theta = \theta_0 \text{ mód } 2\pi$. Es decir, cada vez que exista $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$. Luego, el conjunto de soluciones es

$$\{\theta_0/n + 2k\pi/n \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

De esta forma, las soluciones distintas[15] son $\theta_0/n, \theta_0/n + 2\pi/n, \ldots, \theta_0/n + 2(n-1)\pi/n$. Así, la ecuación $z^n = w$ tiene exactamente n soluciones dadas por

$$w_0 = \sqrt[n]{r_0} e^{i\theta_0/n}, w_1, \ldots, w_{n-1}$$

donde $w_k = w_0 e^{i2\pi k/n}$, para $k \in [0..(n-1)]$.

Con la interpretación geométrica del producto, las raíces n-ésimas de un complejo w se pueden entender de la siguiente forma: La primera raíz w_0 tiene módulo $\sqrt[n]{|w|}$ y argumento $\arg(w)/n$. Es decir, el argumento original de w se divide en n partes. Para obtener la solución w_k, simplemente se debe rotar w_0 en un ángulo de $2k\pi/n$ radianes. (Para un ejemplo, ver Figura 24.)

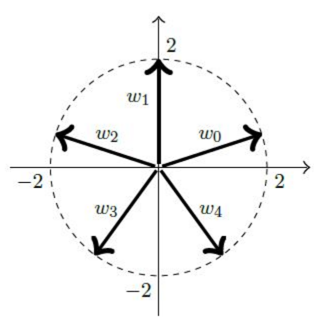

Figura 24: Raíces de $z^5 = w$ con $w = 32i$.

Una consecuencia inmediata[16] del último resultado demostrado es la siguiente:

Corolario 10.19 Las raíces n-ésimas de la **unidad** son $w_k = e^{i2k\pi/n}$, para $k \in [0..(n-1)]$. Además, se tiene que $w_k = w_0^k$ para todo $k \in [0..(n-1)]$.

Trabajo de pares (15 min.) Explique con sus propias palabras, párrafo por párrafo, lo que entendió del texto leído, respondiendo las preguntas de su pareja.

[14] ¿Coincide esto con lo que ya se en $\mathbb{R}$, por ejemplo para $n = 2$, $\omega = 1$?

[15] ¿Por qué solo esas y por qué son distintas?

[16] ¿Demostración?