Ejercicio (25 min.)

1. (1.5 ptos.) Sabemos que la conjugación geométricamente es reflejar con respecto al eje real. Describa geométricamente lo que hace la función $z \mapsto -z$ [**Sugerencia:** Escriba $z = (a, b)$ y ubique z y $-z$ en el plano.]

   Solución: Si $z = (a, b)$, entonces $-z = (-a, -b)$ **0.5 ptos.** es el punto diametralmente opuesto. Así, la función es geométricamente una rotación en 180 grados en torno al origen. **1 pto.**

2. (1.5 ptos.) Si un complejo z está en el segundo cuadrante, ¿En qué cuadrante está el complejo $-\overline{z}$? [**Sugerencia:** Escriba $z = (a, b)$, grafique $\overline{z}$ y luego $-\overline{z}$ o argumente directamente por el efecto de las funciones $z \mapsto \overline{z}$ y $z \mapsto -z$.]

   Solución: Como conjugar es reflejar con respecto al eje X y tomar el opuesto aditivo ($z \mapsto -z$) es rotar 180 grados con respecto al origen, **0.5 ptos.** tenemos que, al reflejar un punto del segundo cuadrante, éste queda en el tercero **0.5 ptos.** y al rotarlo en 180 grados en torno al origen queda en el primer cuadrante. **0.5 ptos.**

3. (3 ptos.) Resuelva la ecuación $z^2 + |z| + 3 = 0$ [**Sugerencia:** Exprese $z = a + ib$, reemplace en la ecuación e iguale partes reales e imaginarias.]

   Solución: Siguiendo la sugerencia, se tiene que, si $z = a + ib$, entonces

$$z^2+|z|+3 = 0 \iff (a+bi)^2+\sqrt{a^2+b^2}+3 = 0 \iff a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}+3+2abi = 0. \textbf{ 1 pto.}$$

   Igualando partes reales e imaginarias de los complejos se tiene que $a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}+3 = 0 \wedge 2ab = 0$. Por lo tanto, $a = 0 \vee b = 0$. **0.5 ptos.** Si $b = 0$, obtenemos que $a^2 + |a| + 3 = 0$ lo que no ocurre para ningun $a \in \mathbb{R}$ pues el lado izquierdo es mayor o igual que 3. Por lo tanto, $a = 0 \wedge b \neq 0$. **0.5 ptos.** Para $a = 0$, se tiene que $-b^2 + |b| + 3 = 0$. Si $b > 0$, se tiene que $b = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, siendo la única solución positiva $b = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$. **0.5 ptos.** Si $b < 0$, entonces $b = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, siendo la única solución negativa $b = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Así, las soluciones de la ecuación son $z = \pm\frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **0.5 ptos.**