Duodécima sesión

Lectura (25 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, respondiendo las preguntas al margen para verificar si está comprendiendo lo leído. Además, dé un ejemplo de un complejo de modulo 1 y de un complejo tal que su inverso multiplicativo sea igual a su conjugado.

10.1 Introducción

Consideremos la ecuación $x^2 = 2$. Ésta no tiene soluciones en $\mathbb{Q}$, pero sí en $\mathbb{R}$ ($\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$). Podemos pensar en los reales como una extensión de los racionales, donde esta ecuación sí tiene solución.

Del mismo modo, sabemos que en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación **no** tiene solución: $x^2 = -4$. Debido a esta carencia, se "crea" el conjunto de los números complejos, el cual será una extensión de $\mathbb{R}$, donde esta ecuación sí tiene solución.

Definición 10.1 (Números complejos) Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Llamaremos a $\mathbb{C}$ conjunto de los números complejos[1], y lo dotaremos de las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas a continuación[2]: para $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$

$$z + w = (a + c, b + d),$$
$$z \cdot w = (ac - bd, ad + bc).$$

Es fácil verificar que[3]:

- El neutro en $(\mathbb{C}, +)$ es $(0, 0)$ y el neutro en $(\mathbb{C}, \cdot)$ es $(1, 0)$.
- El inverso en $(\mathbb{C}, +)$ de (a, b) es $(-a, -b)$.
- El inverso en $(\mathbb{C}, \cdot)$ para $(a, b) \neq (0, 0)$ es $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Además, como $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo[4] también son ciertas las identidades de la Proposición 9.25.[5] ¿Tiene solución la ecuación $z^2 = -4$ en $\mathbb{C}$? Antes de responder esta pregunta notemos que la igualdad involucra a -4 que no es un elemento de $\mathbb{C}$.[6] Así, primero que todo es necesario decir como vamos a representar -4 como un complejo y en general cualquier número real.

10.2 Forma cartesiana y módulo de un complejo

En Geometría Analítica se considera al subconjunto de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ de las abscisas dado por $OX = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ como correspondiente al conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Esta correspondencia se ha tratado hasta ahora de manera intuitiva. Con el lenguaje que hemos desarrollado podemos expresar esto de manera más precisa.

Proposición 10.2. La función $f : \mathbb{R} \to OX$ dada por $f(a) = (a, 0)$ es un isomorfismo de anillos[7] entre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(OX, +, \cdot)$, donde las operaciones en OX son las de $\mathbb{C}$.

[1] ¿Cómo es $\mathbb{C}$ una extensión de los reales?
[2] ¿Por qué definir así las operaciones?
[3] ¿Lo puedo hacer fácilmente?
[4] ¿Qué propiedades son claras de las definiciones de $+$ y $\cdot$ y cuales ameritan hacer alguna cuenta/desarrollo?
[5] ¿Cuáles son esas?
[6] ¿Por qué?
[7] ¿Qué es un isomorfismo de anillos?¿De qué nos sirve la proposición?

Dem. Es claro que en $\mathbb{C}$ se tiene que $(a+b,0)=(a,0)+(b,0)$ y que $(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0, a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0)$. Además, $f(1)=(1,0)$ que es el neutro de $(\mathbb{C},\cdot)$. De esta forma, f es un homomorfismo de anillos. Por otra parte, f es biyectiva con inversa $g: OX \to \mathbb{R}$ dada por $g(a,0)=a$.

Desde ahora en adelante, pensaremos que $\mathbb{R}$ es el subconjunto OX de $\mathbb{C}$. En lugar de anotar $(a,0)$ los elementos de OX los anotaremos, simplemente, a. Sea $z=(a,b)\in\mathbb{C}$. Entonces, $(a,0)+(0,b)=(a,b)$, pues la suma en $\mathbb{C}$ es coordenada por coordenada. De este modo, geométricamente z queda representado como un punto en el plano cartesiano cuyo desplazamiento en el **eje real** (eje horizontal) es a y en el **eje imaginario** (eje vertical) es b. (También el complejo z se representa como un **vector** que se dibuja como una flecha que parte del origen O del plano cartesiano y termina en z.)

Además, $(0,1)\cdot(b,0)=(0\cdot b-1\cdot 0, 0\cdot 0+1\cdot b)=(0,b)$. Entonces, $z=(a,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)$. Es decir, el complejo z se puede escribir en términos de los dos elementos $(a,0)$ y $(b,0)$ de OX, los cuales hemos dicho se anotarán a y b, respectivamente. El elemento $(0,1)$ juega un rol destacado en el estudio del conjunto $\mathbb{C}$.

Definición 10.3 La **unidad imaginaria** es el complejo $(0,1)$. Se anota i.

Usando la unidad imaginaria, el complejo z se puede escribir como $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$.[8]

Definición 10.4 (Forma cartesiana) La expresión $a+ib, a, b\in\mathbb{R}$ se llama la **forma cartesiana** del complejo $z=(a,b)\in\mathbb{C}$. Se dice que la **parte real** de z es a y se anota $\mathbb{R}e(z)$. La **parte imaginaria** de z es b y se anota $\mathbb{I}m(z)$.

Una propiedad importante[9] de la unidad imaginaria i es que su cuadrado es -1. En efecto,

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0)=-1$$

Proposición 10.5 Las funciones $\mathbb{R}e(\cdot)$ e $\mathbb{I}m(\cdot)$ son endomorfismos en $(\mathbb{C},+)$. Además, para $z\in\mathbb{C}$ y $a\in\mathbb{R}$:

(I) $\mathbb{R}e(az)=a\mathbb{R}e(z)$

(II) $\mathbb{I}m(az)=a\mathbb{I}m(z)$.

(III) $z=w$ si y solo si $\mathbb{R}e(z)=\mathbb{R}e(w)$ e $\mathbb{I}m(z)=\mathbb{I}m(w)$.

Estas propiedades quedan propuestas como ejercicio.[10]

Ejemplo: Volvamos a la pregunta original. ¿La ecuación $z^2=-4$, tiene solución en $\mathbb{C}$? Ahora podemos formular la pregunta en $\mathbb{C}$. Buscamos $z=a+ib$ tal que $(a+ib)^2=-4+i\cdot 0$. Esto ocurre si y sólo si $\mathbb{Re}\left((a+ib)^2\right)=-4$ y $\mathbb{Im}\left((a+ib)^2\right)=0$. Como[11] $(a+ib)^2=a^2-b^2+2abi$, de lo anterior se obtienen dos ecuaciones para a y $b: a^2-b^2=-4$ y $2ab=0$. Cuando $b=0$, la primera se reduce a $a^2=-4$, que sabemos no tiene solución. Así, podemos suponer que $b\neq 0$ y entonces $a=0$, lo que implica que $b^2=4$. De esta forma, $b=2$ o $b=-2$, con lo que encontramos dos soluciones a la pregunta $z^2=-4: 2i$ y $-2i$.

Más generalmente, veamos que toda ecuación $z^2=w$ tiene solución en $\mathbb{C}$, para $w\in\mathbb{C}$ dado. Procediendo como antes vemos que si $z=a+ib$ y $w=c+id$, entonces $a^2-b^2=c$ y $2ab=d$.

[8] ¿Cómo se ve para un complejo z concreto, por ejemplo, para $z=(\sqrt{2},-3)$?

[9] ¿Por qué?

[10] ¿Me puedo convencer rápidamente de alguna?

[11] ¿Por qué?

Si $d = 0$, entonces se procede como antes, definiendo $b = 0$ y $a = \sqrt{c}$, si $c \geq 0$, y $a = 0$ y $b = \sqrt{-c}$, si $c < 0$. Para $d \neq 0$, tenemos que $a, b \neq 0$ y podemos despejar $a = d/(2b)$. Al reemplazarlo en $a^2 - b^2 = c$ nos queda $d^2/4b^2 - b^2 = c$. Ésta es una ecuación cuadrática en b^2 que tiene como solución[12] $b^2 = \left(-c + \sqrt{c^2 + d^2}\right)/2$. De aquí es claro[13] como obtener el valor de a. Por lo tanto, siempre tenemos solución.

[12] ¿Es cierto?

[13] ¿Cómo?

La conclusión del ejemplo anterior es que la ecuación $z^2 = w$, para $w \in C$ dado, siempre tiene al menos una solución y nunca más de dos soluciones.

Veremos pronto una segunda manera de representar los elementos de $\mathbb{C}$, que será muy útil para entender geométricamente las soluciones de la ecuación $z^2 = w$, para w dado, y en general las ecuaciones $z^n = w$, para $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathbb{C}$ dados.

Definición 10.6 (Módulo de un complejo) El módulo de $z \in \mathbb{C}$ es su distancia al origen O. Se anota $|z|$. Según el Teorema de Pitágoras tenemos que si $z = a + ib$, entonces

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Algunas propiedades relevantes del módulo de un complejo son las siguientes. Recordemos que las potencias z^k, para $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se definen como $z^0 = 1, z^{k+1} = z^k \cdot z$, para $k \geq 0$ y $z^k = \left(z^{-1}\right)^{-k}$, si $k < 0$.

Proposición 10.7 Para $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + ib$ se tiene que:[14]

[14] ¿Por qué pueden ser importantes estas propiedades?

(I) $|z| \geq 0$ y vale cero si y sólo si $z = 0$.

(II) $|z| \geq |a|$ y $|z| \geq |b|$ con lo que $|z| \geq |\mathbb{R}e(z)|, |\mathbb{Im}(z)|$.

(III) Además, para $w \in \mathbb{C}, |zw| = |z| \cdot |w|$.

(IV) $\left|z^k\right| = |z|^k$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Dem. Lo primero es consecuencia de que $\sqrt{x} \geq 0$ y vale cero si y sólo si $x = 0$. Lo segundo viene de la desigualdad $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \text{máx}\{a, b\}$. Lo tercero queda como ejercicio[15] y lo último se obtiene aplicando recursivamente la tercera parte a $z = w$.

[15] ¿Lo puedo hacer? Veamos...

Conjugación en $\mathbb{C}$

Definición 10.8 (Conjugado) La función $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $C(a+ib) = a-ib$ se llama la conjugación de un complejo. Al complejo $a - bi$ se le llama el **conjugado** de $a + bi$ y se anota $\overline{a + ib}$.[16]

[16] ¿Para qué definir el conjugado?

Proposición 10.9 Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se tiene:

(I) Propiedades simples de la conjugación:[17]

[17] ¿Para qué pueden servir?

a) $\bar{\bar{z}} = z$. (es autoinversa)

b) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$. (es la identidad cuando se restringe a $\mathbb{R}$)

c) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$. (es endomorfismo[18] de $(\mathbb{C}, +)$)

d) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. (es endomorfismo de $(\mathbb{C}, \cdot)$).

[18] ¿Qué es un endomorfismo?

Trabajo de pares (10 min.) Explique con sus propias palabras, párrafo por párrafo, lo que entendió del texto leído.