Respuestas a las preguntas de la lectura 12

1. En este punto de la lectura no es claro porque $\mathbb{R}$ no es subconjunto de $\mathbb{C}$, más adelante se hace una correspondencia entre $\mathbb{R}$ y $OX \subset \mathbb{C}$ tal que funcionan igual con su estructura algebraica (isomorfismo).

2. Según las propiedades que se listan a continuación de la definición, $(\mathbb{C}, +)$ es grupo abeliano y todo complejo distinto del neutro aditivo tiene inverso multiplicativo. Se puede comprobar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo y que si definiéramos por ejemplo la multiplicación coordenada a coordenada (como la suma), $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tendría divisores de cero (por ejemplo, $(a, 0) \cdot (0, b)$ sería $(0, 0)$). Es más natural la definición de la multiplicación pensando los complejos como $a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, i es un elemento con $i^2 = -1$ y la multiplicación se realiza distribuyendo y conmutando como en los reales $(a + ib)(c + id) = a(c+id)+ib(c+id) = ac+aid+ibc+ibid = ac+i(ad+bc)+i^2bd = ac-bd+i(ad+bc)$.

3. Los primeros dos puntos son rápidos. Para el tercero:
$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0).$$

4. $(\mathbb{C}, +)$ grupo abeliano es directo, la conmutatividad de la multiplicación hay que verificarla, así como la asociatividad de la multiplicación y la distributividad.

5. Buscar en apunte.

6. Porque los elementos de $\mathbb{C}$ son pares ordenados de números reales y -4 no lo es.

7. Es un morfismo biyectivo (biyección que "respeta" estructuras). La utilidad es que se puede ver $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$ **como subcuerpo** (con su estructura algebraica).

8. $\sqrt{2}+i(-3) = (\sqrt{2}, 0)+(0, 1)(-3, 0) = (\sqrt{2}, 0)+(0\cdot(-3)-1\cdot 0, 0\cdot 0+1\cdot(-3)) = (\sqrt{2}, -3)$.

9. Porque tenemos las soluciones $\pm i$ de la ecuación $x^2 = -1$ y por lo tanto, las soluciones $\pm\sqrt{a}i$ de $x^2 = -a$, $a > 0$.

10. La tercera es inmediata de la igualdad de pares ordenados.

11. Porque vale el teorema del binomio en un anillo conmutativo (en particular la formula para el cuadrado de binomio usual considerando que $i^2 = -1$).

12. Si, hay que multiplicar por $4b^2$ en ambos lados de la ecuación obteniendo $d^2 - b^4 = cb^2$ que equivale a $b^4 + cb^2 - d^2 = 0$.

13. Reemplazando b^2 en la otra ecuación $a^2 - b^2 = c$.

14. El módulo es geométricamente la distancia del punto $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ al origen $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, luego las propiedades se pueden interpretar geométricamente. En particular, (II) y (III) nos ayudan a demostrar la desigualdad triangular y (IV) nos permite calcular el largo del vector z^k en función del largo de z.

15. Calculamos $|zw|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2 = a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2) = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2|w|^2$.

16. El conjugado es la operación geométrica de reflejar con respecto al eje real y es un automorfismo de $\mathbb{C}$. Además permite escribir el inverso de un complejo no nulo como $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ y escribir la parte real e imaginaria de un complejo en función de z y $\overline{z}$.

17. Las propiedades c) y d) juegan un papel fundamental en la demostración de la desigualdad triangular. Geométricamente nos dicen que reflejar dos veces con respecto al eje real "nos deja igual", que podemos usarlo para verificar si un complejo es real o no viendo si queda fijo o se mueve por una transformación, que no importa el orden de las operaciones sumar y reflejar y multiplicar y reflejar.

18. Homomorfismo de una estructura en si misma.