Respuestas a las preguntas de la lectura 10

1. Estudiando estructuras en general, se estudian infinitas estructuras al mismo tiempo, abstrayendo las propiedades esenciales que interesan de tales objetos, con lo cual se pueden comparar, por ejemplo, las estructuras conocidas.

2. Las relaciones de equivalencia en un conjunto de objetos clasifican estos. Por ejemplo, la congruencia módulo 3 hace que sean equivalentes todos los números que dejan el mismo resto al dividir por 3. Esto es útil en problemas de divisibilidad, donde por ejemplo, usando las propiedades de la equivalencia por congruencia módulo 3, se puede probar que, para todo natural n se tiene que $4^n + 5$ es múltiplo de 3 (sin necesidad de inducción).

3. Cualquier función $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es l.c.i, por ejemplo, $*(x, y) = e^{x+y}$. Por otra parte, una función que tome dos elementos de un conjunto y "los saque" no será l.c.i como por ejemplo $*(x, y) = x - y$, para x, y naturales.

4. A^A es una notación para el conjunto de funciones de A en A. Más generalmente, un conjunto "elevado" a otro A^B es una notación para el conjunto de funciones de B en A. Tal notación está inspirada por las cardinalidades en el caso finito.

5. No, por la proposición 9.4. Por lo tanto, es un error del apunte referirse al neutro antes de verificar su unicidad.

6. Por los axiomas de cuerpo en $\mathbb{R}$.

7. Por los axiomas de cuerpo en $\mathbb{R}$.

8. En general la unicidad sirve para demostrar de manera indirecta la igualdad de dos elementos de un conjunto pues, si uno muestra que dos elementos tienen una propiedad y se sabe que hay uno solo que cumple la propiedad, se concluye que tales elementos son iguales. También sirve para descartar la posible opción de tener estructuras con muchos elementos donde todos queden fijos al operarse entre sí.

9. La técnica de demostración para unicidades. Asumiendo que hay dos elementos que cumplen una propiedad, usar la propiedad para ver que son iguales.

10. Sirve para asegurar unicidad de soluciones de ecuaciones, por ejemplo, en una estructura asociativa, la ecuación $a * x = b$ tiene única solución $x = a^{-1} * b$ si a tiene inverso (único).

11. Usando la técnica de tomar dos elementos con la propiedad de ser inversos de un elemento y probar que son iguales, se debería ser capaz de avanzar en la demostración hasta el planteamiento de las ecuaciones que dicen que y, z son inversos de x. El resto puede ser natural o no, quizás es más natural tomar una de las ecuaciones, por ejemplo, $x * z = e$ y operar y a ambos lados o considerar $x * y = e$ y operar z a ambos lados.

12. El resultado nos dice que tomando inversos no se obtienen muchos elementos, ya que al tomar el inverso del inverso se vuelve al elemento original. Por otra parte, nos dice cómo calcular el inverso del producto de dos invertibles, conociendo los inversos de cada factor (ojo que el orden es importante si no hay conmutatividad). Finalmente se tiene que uno puede cancelar como está acostumbrado en $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ si es que el elemento es invertible.

13. Para (I), ¿qué nos dicen las ecuaciones $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ sobre el elemento x? Para (III), plantear la ecuación $x * a = x * b$ y operar por el inverso de x a ambos lados.

14. Es totalmente análogo al desarrollo del apunte, debe hacerlo!