Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Lab de Introducción al Álgebra. Primavera 2024.

Décima sesión

Lectura (25 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, respondiendo las preguntas al margen para verificar si está comprendiendo lo leído. Además, dé un ejemplo de una estructura algebraica conmutativa y de una no conmutativa.

Estructuras algebraicas

Hemos estudiado conjuntos, como operar con ellos, como establecer relaciones y asociaciones entre sus elementos, etc. No obstante, algo que hacemos con mucha frecuencia es operar con los elementos de un conjunto. Por ejemplo, sumar y multiplicar números, ya sea enteros o reales, componer funciones, operamos con conjuntos (uniéndolos, intersectándolos,...), etc. Lo siguiente que haremos es abocarmos al estudio de los conjuntos dotados de una o más operaciones, es decir, a estudiar las estructuras algebraicas.[1] Un objetivo importante de nuestro esfuerzo es identificar propiedades comunes a clases de estructuras algebraicas y entender que significa que dos estructuras aparentemente distintas son "matemáticamente equivalentes".[2]

[1] ¿Para qué?

[2] ¿Conozco alguna noción de equivalencia entre objetos matemáticos (números, funciones, conjuntos...)? ¿Por qué nos interesan tales nociones de equivalencia?

9.1 Definiciones generales

Nuestra primera definición captura la noción de operación entre elementos de un conjunto.

Definición 9.1 (Ley de composición interna) Dado A un conjunto no vacio. Una ley de composición interna en A (l.c.i.) es una función

$$\begin{array}{rcl} * : A \times A & \rightarrow & A \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array}$$

Ejemplo:

- $+$ en $\mathbb{R}$.
- $\cdot$ en $\mathbb{Q}$.
- $\cup$ en $\mathcal{P}(A)$, donde A es un conjunto.
- La división **no** es una ley de composición interna en $\mathbb{Q}$, pues $1/3$ no es un entero[3].

[3] ¿Puedo dar otro ejemplo de l.c.i y de no l.c.i.?

Para estudiar estas operaciones entre elementos de un conjunto, definimos:

Definición 9.2 (Estructura algebraica) Si $*$ es una l.c.i. (es decir, una operación) definida en el conjunto A, al par $(A, *)$ le llamaremos estructura algebraica. Si sobre A tenemos definida una segunda operación $\triangle$, entonces denotamos por $(A, *, \Delta)$ la estructura algebraica que considera ambas leyes de composición interna en A.

Notemos que conocemos ya varias estructuras algebraicas:

Ejemplo:

- $(\mathrm{N}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Para E conjunto, $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$.
- Para A conjunto no vacio, $\left(A^A, \circ\right)$, donde $\circ$ es la composición de funciones.[4]

[4] ¿Qué es A^A?

Como vemos, hay una enorme cantidad de estructuras algebraicas posibles. En este capítulo estudiaremos propiedades que muchas de ellas comparten. Veremos que las estructuras de distintos tipos pueden comportarse de manera muy similar. Es decir, tener propiedades muy parecidas, cuando las llevamos a un nivel de abstracción mayor.

Nombres especiales y propiedades básicas

Definición 9.3 Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

- Diremos que $*$ es asociativa si
$$\forall x, y, z \in A,\ (x * y) * z = x * (y * z).$$
- Sea $e \in A$. Diremos que e es elemento neutro para $*$ si
$$\forall x \in A, e * x = x * e = x.$$
- Si $e \in A$ es el[5] neutro para $*$ y $x \in A$, diremos que x tiene inverso si existe un $y \in A$ tal que
$$x * y = y * x = e.$$
  En tal caso, y será un inverso de x, y viceversa.

[5] ¿No puede haber más de un neutro?

- Diremos que $*$ es conmutativa si
$$\forall x, y \in A, x * y = y * x.$$
- Un elemento $a \in A$ es cancelable si para todo $y, z \in A$, se tienen:
$$\begin{aligned} a * y = a * z &\Rightarrow y = z \\ y * a = z * a &\Rightarrow y = z. \end{aligned}$$
- Si $(A, *, \Delta)$ es un estructura algebraica con dos operaciones, diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si para todo $x, y, z \in A$, se tienen:
$$\begin{aligned} x\Delta(y * z) &= (x\Delta y) * (x\Delta z) \\ (y * z)\Delta x &= (y\Delta x) * (z\Delta x). \end{aligned}$$

Ejemplo: En lo que se refiere a los ejemplos $(\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ya discutidos, se tiene lo siguiente:

- En todos los casos las operaciones $+$ y $\cdot$ son asociativas y conmutativas y $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.[6]
- 0 es el neutro de $(\mathbb{R}, +)$ y 1 es el neutro de $(\mathbb{R}, \cdot)$.[7]

[6] ¿Por qué?

[7] ¿Por qué?

- Los inversos existen en $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+)$ y $(\mathbb{R},+)$, pero no en $(\mathbb{N},+)$ donde ningún elemento, salvo el 0 , tiene inverso.
- En $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ y en $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ todo elemento es invertible. En $(\mathbb{Z},\cdot)$ sólo -1 y $+1$ son invertibles y en $(\mathbb{N},\cdot)$ sólo el $+1$ lo es.

Proposición 9.4 (Unicidad del neutro) Una estructura algebraica $(A,*)$ posee a lo más un elemento neutro.[8]

Dem. Supongamos que $(A,*)$ posee dos neutros e y e'. Como e es neutro, entonces $e*e'=e'$. A su vez, como e' es neutro, entonces $e*e'=e$. Juntando ambas igualdades, concluimos que $e=e'$.[9]

Proposición 9.5 (Unicidad de inversos) Si la estructura algebraica $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.[10] Asi, si $x\in A$ posee inverso, lo podemos denotar sin ambigüedad como x^{-1}.

Dem. Sea $x\in A$, y supongamos que x posee dos inversos: y y z. Demostraremos que $y=z$. Como y es inverso de x, entonces $x*y=y*x=e$. Análogamente, como z también es inverso de x, entonces $z*x=x*z=e$. Así,[11]

$$\begin{aligned}
y &= y*e && (e \text{ es neutro})\\
&= y*(x*z) && (x*z=e)\\
&= (y*x)*z && (\text{asociatividad})\\
&= e*z && (y*x=e)\\
&= z. && (e \text{ es neutro})
\end{aligned}$$

Proposición 9.6 Si $(A,*)$ es una estructura algebraica asociativa y con neutro $e\in A$, entonces también cumple las siguientes propiedades:[12]

(I) Si $x\in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún, $\left(x^{-1}\right)^{-1}=x$.

(II) Si $x,y\in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también posee inverso que cumple $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$.

(III) Si $x\in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

Dem. Demostraremos (II).[13] Sea $w=y^{-1}*x^{-1}$. Queremos probar que $w=(x*y)^{-1}$. Puesto que los inversos son únicos, bastará con mostrar que $w*(x*y)=e=(x*y)*w$. Verifiquemos la primera igualdad.

$$\begin{aligned}
w*(x*y) &= (w*x)*y && (\text{asociatividad}).\\
&= \left(\left(y^{-1}*x^{-1}\right)*x\right)*y && (\text{def. de } w).\\
&= \left(y^{-1}*\left(x^{-1}*x\right)\right)*y && (\text{asociatividad})\\
&= \left(y^{-1}*e\right)*y && (x,\ x^{-1} \text{ son inversos})\\
&= y^{-1}*y=e && (e \text{ es neutro; } y \text{ e } y^{-1} \text{ son inversos}).
\end{aligned}$$

Queda propuesto mostrar que[14] también $(x*y)*w=e$. Así, concluimos que $w=(x*y)^{-1}$.

Trabajo de pares (10 min.) Explique con sus propias palabras, párrafo por párrafo, lo que entendió del texto leído.

[8] ¿De qué sirve este resultado?

[9] ¿Qué puedo aprender de la demostración? ¿alguna técnica?

[10] ¿De qué sirve este resultado?

[11] ¿Podría haberlo demostrado solo? ¿la manera presentada es la más “natural”?

[12] ¿De qué sirve este resultado?

[13] ¿Cómo demuestro (I) y (III)?

[14] ¡A trabajar!