Ejercicio. (25 min.)

1. En $\mathbb{Z}$, se define la operación ∇ como $s\nabla t = (s+1)(1+t) - 1$ para todo $s, t \in \mathbb{Z}$. Probar que $(\mathbb{Z}, \nabla)$ es una estructura algebraica y estudiar si se tiene: asociatividad, conmutatividad, existencia de neutros y existencia de inversos. Proceda como sigue

   1.1) (1.2 ptos.) Hay que verificar que ∇ es LCI. Es decir ver si $s\nabla t$ es elemento de $\mathbb{Z}$, para todo $s, t \in \mathbb{Z}$.

   Solución:

   Para $s, t \in \mathbb{Z}$, $s+1, 1+t \in \mathbb{Z}$ pues $+$ es l.c.i en $\mathbb{Z}$ 0.5 ptos., $(s+1)(1+t) \in \mathbb{Z}$ pues $\cdot$ es l.c.i. en $\mathbb{Z}$ 0.5 ptos. y así $s\nabla t = (s+1)(1+t) - 1 \in \mathbb{Z}$ nuevamente usando que $+$ es l.c.i. en $\mathbb{Z}$ 0.2 ptos.

   1.2) (1.2 ptos.) Asociatividad: Para tener asociatividad, tendríamos que tener que para todo $r, s, t \in \mathbb{Z}$, $(r\nabla s)\nabla t = r\nabla(s\nabla t)$. Escriba esta igualdad de forma explícita, usando la definición de ∇.

   Solución:

   Sean $r, s, t \in \mathbb{Z}$. Por una parte, $(r\nabla s)\nabla t = [(r+1)(1+s) - 1]\nabla t = ([(r+1)(1+s) - 1] + 1)(1+t) - 1 = (r+1)(1+s)(1+t) - 1$. 0.5 ptos. Por otra parte, $r\nabla(s\nabla t) = r\nabla[(s+1)(1+t) - 1] = (r+1)(1+[(s+1)(1+c) - 1]) - 1 = (r+1)(s+1)(1+t) - 1$ 0.5 ptos. Así, por conmutatividad de $+$ en $\mathbb{Z}$ se tiene que $(r\nabla s)\nabla t = (r+1)(s+1)(t+1) - 1 = r\nabla(s\nabla t)$ 0.2 ptos.

   1.3) (1.2 ptos.) Conmutatividad: Habría que ver que $s\nabla t = t\nabla s$. Escriba esta igualdad de forma explicita, usando la definición de ∇. ¿Se tiene?

   Solución:

   Para $s, t \in \mathbb{Z}$ se tiene $s\nabla t = t\nabla s \iff (s+1)(1+t) - 1 = (t+1)(1+s) - 1 \iff (s+1)(1+t) = (t+1)(1+s)$. 0.8 ptos. La última igualdad es cierta por la conmutatividad de $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{Z}$. 0.4 ptos.

   1.4) (1.2 ptos.) Neutro: Compuebe que $e = 0$ es tal que $s\nabla e = e\nabla s = s$, $\forall s \in \mathbb{Z}$.

   Solución:

   Por la conmutatividad, basta verificar que $0\nabla s = s$, para todo $s \in \mathbb{Z}$. 0.4 ptos. Veamos esto último. Sea $s \in \mathbb{Z}$, entonces $0\nabla s = (0+1)(1+s) - 1 = s$. 0.8 ptos.

   1.5) (1.2 ptos.) Inversos: Sabemos que s es inverso de t si $(s+1)(t+1) - 1 = 0$, ¿El producto $x \cdot y$ de que enteros x, y es igual a 1 ? Una vez que sabemos cuales son los x, y posibles, ¿se puede concluir que ciertos n, m tienen inversos? ¿Los demás elementos tienen inversos o no?

   Solución:

   Sea $s \in \mathbb{Z}$. Entonces s tiene inverso si y solo si existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $s\nabla t = 0$ (basta ver un lado por la conmutatividad). La última igualdad equivale a que

$(s+1)(1+t)=1$. 0.2 ptos. Como los únicos enteros con inverso multiplicativo son 1 y -1, se tiene que $s+1=1+t=1$ o $s+1=1+t=-1$. 0.5 ptos. Concluimos que los únicos elementos invertibles (pues ser invertible equivale a que sumado con 1 de ± 1) en $(\mathbb{Z}, \nabla)$ son 0 y -2. 0.5 ptos.