Respuestas a las preguntas de la lectura 9

1. La usábamos como igualdad de números si los conjuntos son finitos. La diferencia ahora es que la igualdad es mera notación para indicar que hay función biyectiva entre los conjuntos, lo cual coincide en el caso de conjuntos finitos.

2. Conocemos funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos(x)$. También conocemos sucesiones $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como $a_n = \frac{1}{n+1}$, $a_n = (-1)^n$. La primera función es biyectiva y nos serviría para decir que $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$, la segunda no es inyectiva, pero $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ si lo es, luego $|[0,\infty)| \leq |\mathbb{R}|$. La función coseno nos da una biyección $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ con lo cual $|[0,\pi]| = |[-1,1]|$. Por otra parte, la sucesión $a_n = \frac{1}{n+1}$ es inyectiva, luego $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ y nos da una función biyectiva $a : \mathbb{N} \to \{1, 1/2, 1/3, ...\}$ con lo cual $|\mathbb{N}| = |\{1, 1/2, 1/3, ...\}|$. Finalmente, la sucesión $a_n = (-1)^n$ no es inyectiva, solo lo es si nos restringimos a un dominio de la forma $\{n\}$ o $\{n, m\}$, con n, m de distinta paridad. Se obtiene que $|\{n\}| = |\{(-1)^n\}|$ y en el último caso, obtenemos que $|\{n, m\}| = |\{-1, 1\}|$.

3. Las propiedades $(I), (iv)$ y (III) nos dicen que la relación $A\mathcal{R}B \iff |A| = |B|$ es de equivalencia, lo que permite clasificar los conjuntos en clases segun su cardinalidad. Por otra parte, la propiedad (II) nos sirve para demostrar, de manera indirecta, que cierto conjunto tiene menor o igual cardinalidad que otro (sin pensar en buscar una función inyectiva). Las propiedades son intuitivas para conjuntos finitos, la propiedad (iv) no parece muy intuitiva ya que es una afirmación sobre la existencia de una función biyectiva, dadas dos inyectivas.

4. Claro $f \circ g(x) = f \circ g(y) \iff f(g(x)) = f(g(x)) \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$, donde la última implicancia es por inyectividad de g y la penúltima por inyectividad de f.

5. Para la primera función, nada nuevo porque es biyectiva, para la segunda, que $|f(\mathbb{R})| = |[0,\infty)| \leq |\mathbb{R}|$ y para coseno, se concluye que $|\cos(\mathbb{R})| = |[-1,1]| \leq |\mathbb{R}|$. Para la sucesión $a_n = \frac{1}{n+1}$ se concluye que $|\{\frac{1}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}|$ y para $a_n = (-1)^n$ que $|\{-1, 1\}| \leq |\mathbb{N}|$. La intuición es que en cuanto a número de elementos, la imagen es más chica que el dominio porque la función puede no ser inyectiva (en el mejor de los casos se corresponden 1 a 1 los elementos del dominio con los de la imagen, pero en general no y en principio puede haber "más" elementos en el dominio los cuales se "repiten" en la imagen) y si la función fuera inyectiva, es sobreyectiva si ponemos como codominio la imagen y, por lo tanto, tendrían igual cardinalidad.

6. Lo que se puede observar es que al asumir finitud, se obtiene la existencia de una biyección con la cual trabajar. Algo similar podría ser útil al tratar de demostrar que $|A| \not\leq |B|$ (asumir lo contrario, entrega una función inyectiva con la cual trabajar).

7. Para $m \in \mathbb{Z}$, si $m \geq 0$, se tiene que $m = f(2m)$ y si $m < 0$, $m = f(-2m - 1)$. Por lo tanto f es epiyectiva. Para la inyectividad, $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$ si tienen la misma paridad ya que las funciones $x \mapsto \frac{x}{2}$, $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)$ son inyectivas. Si m, n tienen distinta paridad, digamos s.p.g. n par y m impar, entonces $\frac{n}{2} = -\frac{1}{2}(m+1) \Leftrightarrow n = -m - 1$ lo que implica que $n < 0$ lo cual no puede ocurrir pues $n \in \mathbb{N}$.

8. Sirve por ejemplo para enumerar al conjunto si se le agrega o quita una cantidad finita de elementos ya que basta con desplazar los índices para reenumerar. También es útil para hacer construcciones inductivas, como en la demostración de la proposición 8.7.

9. $h \in H \Rightarrow h \in B_k = \{a_1, ..., a_k\}$, algun $k \in \mathbb{N}^*$, por lo tanto $h = a_i = f(i-1)$ con $i - 1 \geq 0$ y por lo tanto f es epiyectiva. Ahora, si $f(j) = f(k)$, entonces $a_{j+1} = a_{k+1}$, donde si $j < k$, entonces $a_{k+1} \notin B_{j+1}$ y $a_{j+1} \in B_{j+1}$, lo que no puede ser. De manera análoga, no puede ocurrir que $j > k$ y por lo tanto $j = k$, conlcuyendo la inyectividad.

10. El resultado se puede usar para argumentar numerabilidad, por ejemplo escribiendo el conjunto como un numerable conocido unido y restado con un finito. De la misma manera, si uno puede escribir un conjunto como unión finita de numerables puede concluir la numerabilidad de tal conjunto. Es lo que se puede hacer muchas veces, cuando en el predicado que define a un conjunto, está el cuantificador existencial.