Novena sesión

Lectura (30 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, respondiendo las preguntas al margen para verificar si está comprendiendo lo leído. Además, dé un ejemplo de conjunto numerable distinto de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, y de los conjuntos B_k y H de la proposición 8.7 partiendo con $A = \mathbb{Q}$.

Conjuntos infinitos

En lo que sigue anotaremos $|A| = |B|$ para indicar que existe $f : A \to B$ biyectiva. [1] Es decir, $|A| = |B|$ si A tiene igual cardinal que B. También anotaremos $|A| \leq |B|$ para indicar que existe $f : A \to B$ inyectiva. Es decir, $|A| \leq |B|$ si A tiene cardinal menor o igual que B. Por último, escribiremos $|A| < |B|$ cuando $|A| \leq |B|$ y $|A| \neq |B|$. [2] Notar que estas convenciones son consistentes con la ya adoptada de denotar por enteros no-negativos el cardinal de un conjunto finito. Partamos con las siguientes propiedades básicas acerca de $|\cdot|$:

Proposición 8.1 Para A y B conjuntos no vacios se tienen las siguientes propiedades[3].

(I) $|A| \leq |A|$ (reflexividad de menor o igual cardinal)

(II) Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$

(III) Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$ (transitividad de menor o igual cardinal)

(iv) $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$.

Dem. Las dos primeras propiedades se justifican por la existencia de la función $\text{id}_A : A \to A$ y la función $f : A \to B$ con $f(x) = x$, ambas inyectivas. La tercera es consecuencia de que la composición de funciones inyectivas es inyectiva[4]. La última propiedad, cuya demostración escapa del alcance de este curso, es conocida como el Teorema de Cantor-Berstein-Schröder.

En la próxima propiedad damos una relación entre el cardinal de la imagen de una función y el de su domino.

Proposición 8.2 (Cardinal de la imagen de un conjunto) Si $f : A \to B$ es función, entonces $|f(A)| \leq |A|$. [5]

[1] ¿Para qué usábamos esa notación antes? ¿Cuál es la diferencia ahora?

[2] ¿Qué conjuntos no finitos A, B y funciones $f : A \to B$ conozco? ¿Me sirven para dar ejemplos de conjuntos con $|A| = |B|$, $|A| \leq |B|$ y $|A| < |B|$? Si no me sirven, los puedo modificar para que sirvan?

[3] ¿de qué me sirven estas propiedades? ¿me hacen sentido?

[4] ¿Puedo dar una demostración corta de esto?

[5] ¿Qué se concluye para $f : A \to B$ que me di como ejemplo en la pregunta 2? ¿es intuitivamente claro el resultado?

Dem. Consideremos la función $g : f(A) \to A$ tal que $g(b) = a$ donde a es un elemento cualquiera perteneciente a $f^{-1}(b)$ (observar que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ porque $b \in f(A)$). Con esta definición se cumple que $f(g(b)) = b$. Entonces g es un función inyectiva pues si $g(b) = g(c)$ entonces $b = f(g(b)) = f(g(c)) = c$. Por definición, se obtiene que $|f(A)| \leq |A|$. Claramente no todo conjunto es finito.

Definición 8.3 (Conjunto infinito) Un conjunto que no es finito se dice *infinito.*

Proposición 8.4 $\mathbb{N}$ es infinito.

Dem. Supongamos que $\mathbb{N}$ fuese finito. Entonces, existiría un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbb{N}| = k$. Es decir, existiría una función biyectiva g entre $\mathbb{N}$ y $[1..k]$. Como $[1..k+1] \subseteq \mathbb{N}$ sabemos que existe una función inyectiva $f : [1..k+1] \to \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $g \circ f : [1..k+1] \to [1..k]$ es una función inyectiva. Esto contradice lo que hemos probado para los conjuntos finitos $[1..k]$ y $[1..k+1]$. [6]

[6] ¿Hay alguna herramienta que pueda obtener de la demostración?

8.1 Conjuntos numerables

Definición 8.5 (Conjuntos Numerables) Llamaremos conjunto numerable a cualquier conjunto que tenga la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.

Proposición 8.6 $\mathbb{Z}$ es numerable.

Dem. Listemos ordenadamente los elementos de $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} \quad \dots \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \dots$$

Construiremos una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ simplemente asignando a cada natural un entero. Notemos que de esta forma estaremos enumerando los elementos de $\mathbb{Z}$. Es decir, iremos "contando" $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ en la medida que recorremos $\mathbb{Z}$. Una posible forma de hacerlo es la siguiente:

$\mathbb{Z}$	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathbb{N}$	...	11	9	7	5	3	1	0	2	4	6	8	10	12	...

Observemos que ésta es una forma sencilla de construir una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, que en nuestro caso posee una forma explícita:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{1}{2}(n+1), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Queda como ejercicio para el lector demostrar que esta f es efectivamente biyectiva[7], con lo que se concluye que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, lo que buscábamos.

[7] ¡A trabajar!

Al igual que lo hecho para conjuntos finitos, podemos nombrar los elementos de un conjunto numerable A aprovechando una biyección f entre $\mathbb{N}$ y A. Así, llamamos a_i al elemento de A tal que $f(i) = a_i$ y a $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una numeración de A. De esta forma, no sólo podemos escribir un conjunto finito A, como $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ para algún

n, sino que también, si A es numerable, lo podemos escribir como $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (o $A = \{a_0, a_1, \ldots.\}$ según sea más conveniente). Esta flexibilidad adicional resulta muy útil[8].

[8] ¿Para qué podría ser útil?

Proposición 8.7 ($|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito) Sea A un conjunto infinito cualquiera. Entonces, para todo $a_1 \in A$ y para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, se cumplen las siguientes afirmaciones.

- A tiene un subconjunto finito B_k de cardinal k con $a_1 \in B_k$.
- A tiene un subconjunto numerable H, con $a_1 \in H$. En particular, $|A| \geq |\mathbb{N}|$.

Dem. Para demostrar la primera parte, aplicamos inducción en k. Para $k = 1$ consideramos $B_1 = \{a_1\}$. Aceptamos que para $k \geq 1$ existe un subconjunto B_k de A de cardinal k. Como A no es finito, $B_k \neq A$. Luego, existe $a_{k+1} \in A \backslash B_k$ que junto a B_k forma el subconjunto $B_{k+1} = B_k \cup \{a_{k+1}\}$ de A de cardinal $k + 1$. Para la segunda parte, sea $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, k \geq 1} B_k$. Veamos que H es infinito. Si no lo fuera, entonces $|H| = \ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. Pero para $k > \ell, B_k \subseteq H$ lo que produce la contradicción $|H| \geq k$. Notemos que por la construcción de H la función $f : \mathbb{N} \to H$, dada por $f(k) = a_{k+1}$, es una biyección[9]. Con esto concluimos que H es numerable.

[9] ¿Puedo escribir una demostración corta?

Corolario 8.8 Todo conjunto infinito A con $|A| \leq |\mathrm{N}|$ es numerable.

Dem. Por hipótesis $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Por la Proposición 8.7 , sabemos que $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Luego, de la parte (IV) de la Proposición 8.1 , sigue que $|A| = |\mathbb{N}|$.

Intuitivamente, al agregar o quitar una cantidad finita de elementos a un conjunto infinito este sigue siendo infinito. La siguiente propiedad permite formalizar esta intuición.

Proposición 8.9 (Perturbación de un conjunto infinito por uno finito) Sea A infinito y B finito. Entonces $|A \cup B| = |A \backslash B| = |A|$. [10]

[10] ¿Cómo se podría usar este resultado?

Proposición 8.10 (Unión finita de numerables) Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ también lo es. En general, si $A_1, \ldots, A_n$ es una familia de n conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ también lo es.

Trabajo de pares (10 min.) Explique con sus propias palabras, párrafo por párrafo, lo que entendió del texto leído.