Ejercicio (pauta)

1. (3 ptos.) Demuestre que el conjunto $A = \{x \cdot n \mid x \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}, n \in \mathbb{N}\}$, es numerable, encontrando una biyección explícita $f : \mathbb{N} \to A$. [**Sugerencia:** Haga una enumeración como la que se usó para enumerar $\mathbb{Z}$, ahora usando los números pares para enumerar los elementos de la forma $\sqrt{2} \cdot n$ y los impares para enumerar los de la forma $\sqrt{3} \cdot n$.]

   Solución:

   Sea $f : \mathbb{N} \backslash \{0\} \to A$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{2}\frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \sqrt{3}\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar. } \color{red}{1{,}5 \text{ ptos.}} \end{cases}$$

   f es inyectiva pues, si $n, m \in \mathbb{N}$ satisfacen $f(n) = f(m)$, entonces n y m tienen igual paridad pues, de lo contrario se obtendría que, $\sqrt{2}\frac{n}{2} = \sqrt{3}\frac{m+1}{2}$ concluyendo que $\sqrt{3}/\sqrt{2} = \frac{n}{m+1}$ es racional. Ahora, si n y m tienen igual paridad, entonces $f(n) = f(m)$ implica que $\sqrt{2}\frac{n}{2} = \sqrt{2}\frac{m}{2}$ o que $\sqrt{3}\frac{n+1}{2} = \sqrt{3}\frac{m+1}{2}$ y, en cualquier caso, se tiene que $n = m$. 1 pto. Por otra parte, f es epiyectiva pues si $x \cdot n \in A$, entonces $x \cdot n = f(2n)$ si $x = \sqrt{2}$ y $x \cdot n = f(2n-1)$ si $x = \sqrt{3}$. 0,5 ptos.

   Nota: También se puede haber demostrado solo la epiyectividad y haber argumentado que A es infinito y usar que $|A| = |f(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$.

2. Demuestre que el conjunto $\mathcal{A}_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3 : a_1 + a_2 \leq 2\}$, es numerable. Proceda como sigue

   a) (1 pto.) Para $i, j \in \mathbb{N}$, defina $\mathcal{A}_{i,j} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{A}_3 : a_1 = i \text{ y } a_2 = j\}$, liste los pares ordenados (a_1, a_2) en $\mathbb{N}^2$ tales que $a_1 + a_2$ es a lo más 2 y deduzca que

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{0,0} \cup \mathcal{A}_{1,0} \cup \mathcal{A}_{0,1} \cup \mathcal{A}_{2,0} \cup \mathcal{A}_{1,1} \cup \mathcal{A}_{0,2}.$$

   Solución:

   Los pares ordenados en $\mathbb{N}^2$ que suman a lo más 2 son $(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1)$, y $(0,2)$. 0.5 ptos. Se sigue que $a_1 + a_2 \leq 2$ si y solo si (a_1, a_2) es alguno de los pares recién listados y, por lo tanto,

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{0,0} \cup \mathcal{A}_{1,0} \cup \mathcal{A}_{0,1} \cup \mathcal{A}_{2,0} \cup \mathcal{A}_{1,1} \cup \mathcal{A}_{0,2}. \qquad \color{red}{0{,}5 \text{ ptos.}}$$

b) (2 ptos.) Finalmente, usando que $\mathcal{A}_{i,j} = \{i\} \times \{j\} \times \mathbb{N}$, para $i + j \leq 2$, pruebe que $|\mathcal{A}_{i,j}| = |\mathbb{N}|$ para cualquier par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ con $i + j \leq 2$ y use un resultado de la lectura para concluir que $\mathcal{A}_3$ es numerable.

Solución:

La función $f : \mathbb{N} \to \{i\} \times \{j\} \times \mathbb{N}$ dada por $f(n) = (i, j, n)$ es biyectiva pues $g : \{i\} \times \{j\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $g(i, j, n) = n$ es su inversa. Por lo tanto, $|\mathcal{A}_{i,j}| = |\mathbb{N}|$ 0,5 ptos. Luego, usando el inciso anterior y el hecho de que la unión finita de numerables es numerable, se obtiene el resultado. 1,5 ptos.

Nota: No descontar puntaje si solo mencionaron que $\{i\}\times\{j\}\times\mathbb{N}$ es numerable o solo dieron la función f o g sin verificar que era biyectiva.