Respuestas a las preguntas de la lectura 8

1. Sabemos comparar número de elementos vía funciones (prop. 7.3, 7.8 y 7.9), sabemos calcular el cardinal de la unión y diferencia (prop. 7.6 y 7.7). Estos resultados se pueden usar para calcular la cardinalidad de un conjunto A: estableciendo una biyección con un conjunto que sabemos calcular su cardinalidad, escribiendo A como unión (disjunta o no) de conjuntos de los cuales se calcular su cardinalidad y la de su eventual intersección o escribiendo A como diferencia de conjuntos de los cuales tambien se sabe calcular la cardinalidad.

2. Para $n = 1 : | \cup_{i=1}^{1} A_i| = |A_1| = \sum_{i=1}^{1} |A_i|$. La H.I. es, es cierto, para n, que $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$. El paso inductivo sería $\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$. Para la unión, se puede escribir $\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}|$ y la dificultad del paso inductivo es obtener $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$ para aplicar H.I. Para ese paso, se necesita usar el resultado visto para $n = 2$ la vez pasada. El resultado se puede usar para calcular cardinalidad de un conjunto mediante cardinalidades conocidas si uno puede extresar el conjunto como unión disjunta de conjuntos finitos. Por ejemplo, se pueden tomar intervalos de números reales $A_n = [n, n+1)$, pero se pide finitos en la proposición. Otra alternativa es intersectar una secuencia de conjuntos, con uno finito para asegurar la finitud de cada uno, por ejemplo $A_n = [n, n+1) \cap \mathbb{N}$.

3. Se necesita enumerar los elementos del producto cartesiano desde 1 hasta $n \cdot m$ (de manera similar a como se hizo con la unión disjunta $A \cup B$, donde se encontró una formula para k de modo que para $k = 1, ...n$ se tenía $a_1, ..., a_n$ y para $k = n+1, ..., n+m$ se tenían $b_1, ..., b_m$). Ésta vez, necesitamos enumerar los $n \cdot m$ pares (a_i, b_j). Esto se puede hacer, por ejemplo, enumerando (a_1, b_j) con $k = 1, ..., m$, (a_2, b_j) con $k = m+1, ..., m+m = 2m$,..., (a_n, b_j) con $k = m(n-1)+1, ..., m(n-1)+m = m \cdot n$. Así, se puede llegar a la formula del texto $k = (i-1)m + j$. Notar que también se podría haber enumerado (a_i, b_1) con $k = 1, ..., n$, (a_i, b_2) con $k = n+1, ..., n+n = 2n$,..., (a_i, b_m) con $k = n(m-1), ..., n(m-1)+n = n \cdot m$, lo que se puede hacer con $k = i + (j-1)n$.

4. Se demuestra por inducción usando que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n)$ y la proposición para el producto cartesiano de dos conjuntos.

5. Se usa la notación por la biyección, en el caso A, B finitos, con el producto cartesiano $B^{|A|} = B \times B \times \cdots \times B$ ($|A|$ veces).

6. Ver respuesta anterior.

7. $\varphi(f) = \varphi(g) \iff f(a_i) = g(a_i)$ para todo $i \in [1..n]$, lo que equivale, dado que f y g tienen el mismo dominio y codominio, a que $f = g$, lo que implica la inyectividad de φ. Para la sobreyectividad se tiene que la tupla $(y_1, ..., y_n) \in B^n$ es $\varphi(f)$, donde $f(a_i) = y_i$, para todo $i \in [1..n]$.

8. La función φ envía una tupla $(x_1, ..., x_n)$ al conjunto de elementos de A cuyos subíndices correspondan a coordenadas 1 de la tupla $(x_1, ..., x_n)$, por ejemplo, en $(0, ..., 0)$ no hay ninguna coordenada igual a 1, por lo tanto, corresponde al conjunto vacío. Por otra parte, a la tupla $(1, ..., 1)$ le corresponde todo A pues todas las coordenadas son 1. Otro ejemplo sería tomar la tupla de unos y ceros alternante $(1, 0, 1, 0, ...)$ a la cual le correspondería el conjunto $\{a_1, a_3, a_5, ...\}$.

9. La función ξ toma un conjunto C con elementos y le asigna la tupla con un 1 en la posición i si a_i es un elemento del conjunto. Por ejemplo a $C = \{a_1\}$ le corresponde la tupla con un 1 solo en la posición 1 (primera posición), es decir, $\xi(\{a_1\}) = (1, 0, ..., 0)$. Para $C = \{a_1, a_n\}$, $\xi(C) = (1, 0, ..., 0, 1)$.

10. Se debe demostrar que $\xi \circ \varphi = id_{\{0,1\}^n}$ y que $\varphi \circ \xi = id_{\mathcal{P}(A)}$.