Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Lab de Introducción al Álgebra. Primavera 2024.

Octava sesión

Lectura (30 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, respondiendo las preguntas al margen para verificar si está comprendiendo lo leído. Además, dé un ejemplo de un conjunto finito y escríbalo como unión de dos, tres o más conjuntos disjuntos. También dé un ejemplo de una función de un conjunto de 2 elementos a un conjunto de 3 elementos y su correspondiente tupla en el producto cartesiano correspondiente, según la función φ de la demostración de la proposición 7.13.

7.1 Uniones y productos cartesianos finitos de conjuntos finitos

Con la ayuda de la noción de sumatoria de una sucesión de números reales podemos extender lo que sabemos de cardinales de conjuntos finitos.[1]

Proposición 7.10 (Cardinal de la unión finita de conjuntos disjuntos) Si los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos de a pares, entonces

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Dem. Por inducción y la Proposición 7.5 (propuesta como ejercicio).[2]

Proposición 7.11 (Cardinal del producto cartesiano) Para A y B conjuntos finitos se tiene que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Dem. Sean n y m los cardinales de A y B, respectivamente. Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_m$ enumeraciones de A y B, respectivamente. Definimos $c_k = (a_i, b_j)$ si $k = (i-1)m + j$ con $i \in [1..n]$ y $j \in [1..m]$. Claramente $k \in [1..nm]$ y $A \times B = \{c_1, \ldots, c_{nm}\}$.[3] Más aún, si $k \neq k', k = (i-1)m + j$ y $k' = (i'-1)\,m + j'$, entonces $i \neq i'$ o $j \neq j'$, por lo que $a_i \neq a_{i'}$ o $b_j \neq b_{j'}$, de donde se concluye que $c_k \neq c_{k'}$, es decir, $c_1, \ldots, c_{nm}$ es una enumeración de $A \times B$. Por definición de cardinalidad se concluye el resultado deseado $\square$

Por lo anterior, es claro que si $A_1, \ldots A_n$ son conjuntos finitos, entonces su producto cartesiano también lo es[4] y

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n|\,.$$

En particular, si A es finito, A^n es finito y $|A^n| = |A|^n$.

[1] ¿Qué sabemos de cardinales de conjuntos finitos?

[2] Plantear la inducción y ver la dificultad en el paso inductivo, ¿En qué situación podría usar este resultado? ¿Conozco una secuencia $A_1, ..., A_n$ de conjuntos disjuntos a pares?

[3] ¿Por qué se le ocurrió definir k de esa manera? ¿Cómo se me podría ocurrir a mi eso?

[4] ¿Por qué? ¿cómo lo demuestro?

Definición 7.12 (Conjunto de funciones) Sean A y B conjuntos, definimos el conjunto de todas las funciones de A en B por[5]

$$B^A = \{f : A \to B \mid \text{ función } \}.$$

Intuitivamente, para construir una función, para cada elemento de A se debe elegir un elemento de B. En esta elección, para cada elemento de A hay $|B|$ opciones. Como hay $|A|$ elementos en A las funciones posibles son $|B|^{|A|}$. Formalmente:

Proposición 7.13 (Cardinal de las funciones) Para A y B finitos el conjunto B^A tiene cardinal $|B|^{|A|}$.

Dem. Basta demostrar que existe una biyección φ entre B^A y el conjunto[6] $B^{|A|}$. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ y $\varphi(f)$ la n-tupla cuya coordenada i-ésima es $f(a_i)$, para $i \in [1..n]$. Dejamos como ejercicio verificar que φ así definida es una biyección.[7]

Recordemos que $\mathcal{P}(A)$, el conjunto potencia de un conjunto A, consiste en el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A. Tenemos, por ejemplo, que $\mathcal{P}(\{a,b\})$ es $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ o $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. ¿Qué podemos decir del cardinal de $\mathcal{P}(A)$ en términos del cardinal de A ? Lo primero que notamos es que si A es finito entonces $\mathcal{P}(A)$ también lo es. En la siguiente propiedad daremos su valor exacto.

Ejercicio (Cardinal del conjunto potencia): Si A es un conjunto finito, entonces el conjunto de sus partes, $\mathcal{P}(A)$, tiene cardinal finito dado por $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

<u>Indicación:</u> Muestre que $|\mathcal{P}(A)| = \left|\{0,1\}^{|A|}\right|$. Para ello, considere una enumeración $a_1, \ldots, a_n$ de A y $\varphi : \{0,1\}^n \to \mathcal{P}(A)$ donde[8] $\varphi((x_1, \ldots, x_n)) = \{a_i : x_i = 1\}$. Considere además $\xi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^n$ tal que $\xi(C) = (x_1, \ldots, x_n)$ donde[9] $x_i = 1$ si y sólo si $a_i \in C$. Pruebe que ξ es inversa de[10] φ.

Trabajo de pares (10 min.) Explique con sus propias palabras, párrafo por párrafo, lo que entendió del texto leído.

[5] ¿Por qué se usa la notación B^A para tal conjunto?

[6] ¿Qué es $B^{|A|}$?

[7] ¡A verificar!

[8] ¿Entiendo la función φ? ¿Para $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$, qué subconjunto de A es $\varphi(0, ..., 0)$? ¿y $\varphi(1, ..., 1)$?

[9] ¿Entiendo la función ξ? ¿Para $C = \{a_1\}$, qué elemento de $\{0,1\}^n$ es $\xi(C)$? ¿y para $C = \{a_1, a_n\}$?

[10] ¿Cómo pruebo que una función es inversa de otra?