Ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pruebe que $|\mathcal{A}_n| = 6 \cdot 10^{n-2}$, donde:

$$\mathcal{A}_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, \ldots, 9\}^n : a_1 + a_2 \leq 2\}.$$

Proceda como sigue

a) (1,5 ptos.) Para $i, j \in \{0, \ldots, 9\}$, defina $\mathcal{A}_{i,j} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, \ldots, 9\}^n : a_1 = i \text{ y } a_2 = j\}$, liste los pares ordenados (a_1, a_2) en $\{0, \ldots, 9\}^2$ tales que $a_1 + a_2$ es a lo más 2 y deduzca que

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{0,0} \cup \mathcal{A}_{1,0} \cup \mathcal{A}_{0,1} \cup \mathcal{A}_{2,0} \cup \mathcal{A}_{1,1} \cup \mathcal{A}_{0,2}.$$

Solución: Los pares ordenados en $\{0, \ldots, 9\}^2$ que suman a lo más 2 son $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, $(2, 0), (1, 1)$, y $(0, 2)$. 0.5 ptos. Sigue que $a_1 + a_2 \leq 2$ si y solo si (a_1, a_2) es alguno de los pares recién listados y, por lo tanto,

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{0,0} \cup \mathcal{A}_{1,0} \cup \mathcal{A}_{0,1} \cup \mathcal{A}_{2,0} \cup \mathcal{A}_{1,1} \cup \mathcal{A}_{0,2}. \qquad \text{1 pto.}$$

b) (1,5 ptos.) Pruebe que si $(i, j) \neq (i', j')$, entonces $\mathcal{A}_{i,j} \cap \mathcal{A}_{i',j'} = \emptyset$.

Solución: Si $(i, j) \neq (i', j')$ y $\mathcal{A}_{i,j} \cap \mathcal{A}_{i',j'} \neq \emptyset$, existiría $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_{i,j} \cap \mathcal{A}_{i',j'}$ tal que $(i, j) = (a_1, a_2) = (i', j')$, lo que es una contradicción. 1.5 ptos.

c) (1,5 ptos.) Concluya que $|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_{0,0}| + |\mathcal{A}_{1,0}| + |\mathcal{A}_{0,1}| + |\mathcal{A}_{2,0}| + |\mathcal{A}_{1,1}| + |\mathcal{A}_{0,2}|$.

Solución: Los conjuntos $\mathcal{A}_{i,j}$ son finitos pues son subconjuntos del conjunto finito (producto cartesiano finito de conjuntos finitos) $\{0, 1, ..., 9\}^n$ 0.5 ptos. Además, por la parte b) son disjuntos a pares 0.5 ptos. y así, por la regla de la suma para disjuntos se concluye que

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_{0,0}| + |\mathcal{A}_{1,0}| + |\mathcal{A}_{0,1}| + |\mathcal{A}_{2,0}| + |\mathcal{A}_{1,1}| + |\mathcal{A}_{0,2}|. \qquad \text{0.5 ptos.}$$

d) (1,5 ptos.) Finalmente, usando que $\mathcal{A}_{i,j} = \{i\} \times \{j\} \times \{0, \ldots, 9\}^{n-2}$, compruebe que $|\mathcal{A}_{i,j}| = 10^{n-2}$ y que $|\mathcal{A}_n| = 6 \cdot 10^{n-2}$.

Solución: Notemos que

$$\mathcal{A}_{i,j} = \{i\} \times \{j\} \times \{0, \ldots, 9\}^{n-2}.$$

Aplicando la regla para la cardinalidad del producto cartesiano finito de conjuntos finitos 0.5 ptos., obtenemos que $|\mathcal{A}_{i,j}| = 1 \cdot 1 \cdot 10^{n-2} = 10^{n-2}$ 0.5 ptos.

Por c), concluimos que $|\mathcal{A}_n| = 6 \cdot 10^{n-2}$ 0.5 ptos.