Ejercicio. (PAUTA)

1. Usando el teorema del binomio:

   1.1) (1.5 ptos.) Escriba la sumatoria correspondiente al binomio $(2+(-2))^n$.

   Solución: Según el teorema del binomio, para cualquier par de números reales x, y y cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Por lo tanto, para $x = 2$, $y = -2$ se tiene $(2+(-2))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-2)^k$.

   Para la corrección: Descontar 0.5 si pusieron que $(-2)^k = -2^k$ *o* $(-2)^k = 2^k$.

   1.2) (1.5 ptos.) Demuestre que $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}(-1)^k = 0$.

   Solución: Es consecuencia directa del teorema del binomio, para $x = 1, y = -1$ y $n = 100$, pues se tiene que $0 = (1+(-1))^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 1^{100-k}(-1)^k$ y $1^{100-k} = 1$ para todo $k \in \{0, ..., 100\}$.

   Para la corrección: Descontar 0.5 si no pusieron que 1^k *o* 1^{n-k} *es 1 en algún paso (implícita o explícitamente debe estar ese hecho).*

   1.3) (1 pto.) Para naturales $r \leq j \leq l$, demuestre que $\sum_{j=r}^{l} \binom{l-r}{j-r} = 2^{l-r}$. [**Sugerencia:** traslade índices en la sumatoria y use el ejemplo de la lectura.]

   Solución: Trasladando índices en la sumatoria nos queda $\sum_{j=r}^{l} \binom{l-r}{j-r} = \sum_{j=0}^{l-r} \binom{l-r}{j}$. Usando el ejemplo de la lectura se tiene que $\sum_{j=0}^{l-r} \binom{l-r}{j} = (1+1)^{l-r} = 2^{l-r}$.

   Para la corrección: 0.5 por usar bien la traslación de índices y 0.5 por usar bien el ejemplo con el teorema del binomio para índice superior $l - r$.

2. 2.1) (1 pto.) Para $s \in \{0, 1, ..., 10\}$ fijo y $B_s = \{(a, b) \in \{0, 1, ..., 10\}^2 : b = s\}$, encuentre la inversa de la función biyectiva $f : B_s \to \{0, 1, ..., 10\}$ dada por $f(a, s) = a$. (al encontrar la inversa, digamos g, debe verificar que $f \circ g = id$, $g \circ f = id$).

   Solución: La inversa es $g : \{0, ..., 10\} \to B_s$, dada por $g(a) = (a, s)$. Veamos, para todo $a \in \{0, ..., 10\}$, $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a, s) = a = id_{\{0,...,10\}}(a)$. Por otro lado, para todo $(a, s) \in B_s$, $(g \circ f)(a, s) = g(f(a, s)) = g(a) = (a, s) = id_{B_s}(a, s)$.

   Para la corrección: 0.6 por la inversa y 0.2 por cada composición.

   2.2) (1 pto.) Escriba el conjunto $A = \{(a, b) \in \{0, 1, ..., 9\}^2 : b \in \{2, 3\}\}$ como unión de conjuntos finitos. [**Sugerencia:** use el item anterior para argumentar la finitud de los conjuntos.]

   Solución: $A = B_2 \cup B_3$, donde B_s es el conjunto del item anterior (cambiando el 10 por 9 en la definición de B_s). Los conjuntos B_s son finitos pues existe una biyección de éstos con $\{0, ..., 9\}$.

Para la corrección: 0.5 por escribir la unión y 0.5 por argumentar finitud de los conjuntos.