

Respuestas a las preguntas

Lectura 1:

- Binomial es relativo a un binomio, y binomio es suma o resta de monomios, donde un monomio es expresión algebraica de un solo término. Coeficientes binomiales serían números asociados a binomios.
- Las interpretaciones interesantes son combinatoriales. Los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ corresponden al número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.
- $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ y se puede definir recursivamente mediante $0! = 1$, $n! = n(n-1)!$ para $n \geq 1$. $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$, etc. Notar que $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$. Los coeficientes binomiales en principio son números racionales, pero se puede ver que son números naturales. La notación tiene que ver con la interpretación combinatorial “elegir k de n elementos”.
- En la proposición 6.7 y el teorema del binomio se usan las convenciones. En general en sumatorias es útil la convención cuando se quieren trasladar índices.
- La utilidad de (I) es la de una simetría: conozco un coeficiente binomial y automáticamente conozco el correspondiente al simétrico, luego me basta conocer “la mitad” de los coeficientes binomiales para conocerlos todos. La segunda (II) sirve para calcular coeficientes recursivamente, pues si conozco los coeficientes binomiales para n se pueden calcular los coeficientes para $n+1$. De hecho así se construye el famoso “Triángulo de Pascal”.
- Se consideran pues su suma da el binomio correspondiente y la suma de las dos primeras filas da la tercera, lo que corresponde a la identidad de Pascal. Los valores son correctos, se pregunta solo para enfatizar que cuando aparece un cálculo en un texto uno debería intentar verificarlo. También se pueden escribir los coeficientes binomiales para $n=2$ pero no aporta a la discusión, salvo si se escribiera la tercera fila solamente en términos de coeficientes binomiales para hacer la comparación mencionada en el apunte.
- $(x+y)^3$ está en la tercera fila de la segunda tabla.
- Se refiere a $(x+y)^3$.
- El ejemplo dado es interesante porque en la interpretación combinatorial dada arriba, la suma corresponde al conteo de todos los subconjuntos de cualquier tamaño contenidos en un conjunto de tamaño n , es decir, el número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ es 2^n si A tiene n elementos. Si consideramos, por ejemplo $0^n = (1+(-1))^n$ obtenemos la suma $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

Lectura 2:

- Formalizar es hacer preciso el concepto, usando las construcciones y métodos de deducción dados, de manera de poder hacer deducciones válidas desde la lógica. Por eso es importante formalizar los conceptos intuitivos.

- “i.e.” es abreviatura del latín “id est” que quiere decir “esto es” o “es decir”. Para comprobar que un conjunto es finito lo debo enumerar, en particular A es finito pues con los 3 números 1, 2, 3 podemos hacer $a_1 = \text{gato}$, $a_2 = \pi$ y $a_3 = \triangle$ de modo que $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Enumerar es informalmente “etiquetar” los elementos de un conjunto con números.
- Si $A = \emptyset$ y $|A| = n > 0$ llegamos a una contradicción al ser $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ con $a_1 \in A$. El recíproco se define así, o habría que usar el conjunto $[1, 0]$, lo cual no aparece en el apunte. Se puede ver en el apunte extendido.
- Se puede usar para probar que un conjunto es finito sin contar sus elementos, solo estableciendo correspondencia entre los elementos. Por ejemplo, para saber que uno tiene 5 dedos en cada mano uno puede contar los dedos de ambas manos o bien, contar los dedos de una sola mano y juntar dedo a dedo las manos. Una biyección conocida puede ser $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$, otra $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos(x)$, etc. Poniendo dominio finito y codominio la imagen de tal dominio finito se obtienen biyecciones de conjuntos finitos. Por ejemplo, para f se puede restringir el dominio a $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ obteniendo la biyección $\hat{f} : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13, 15\}$. La misma restricción del dominio da para g se obtiene la biyección $\hat{g} : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{\cos(1), \cos(2), \cos(3), \cos(4), \cos(5)\}$.
- Si uno tiene un universo de referencia claramente finito, por ejemplo $\{1, 2, \dots, 1000\}$ y quiere probar que, por ejemplo $\{n \in \mathbb{N} : n^3 \leq 100000000, n^2 + 2n + 1 > 50\}$ es finito.
- Unión disjunta significa que la intersección de los conjuntos es vacía.
- La manera intuitiva de enumerar ahí es etiquetar los elementos de A con los números del 1 al n y los m elementos de B con los m números siguientes, es decir, con los números $n + 1, \dots, n + m$, para eso es que se traslada el subíndice de b_i a b_{i-n} , para que, al partir i en $n + 1$, $i - n$ parte en 1.
- Si $B \subseteq A$, entonces A se puede escribir como lo que hay en el subconjunto B junto con (unión) lo que está en A y no en B . Por otra parte $A \setminus B = A \cap B^c$ es finito al ser subconjunto de A que es finito.
- El resultado es útil además de cuando se quiere calcular cardinalidad y escribir un conjunto como la diferencia de conjuntos con cardinales conocidos, por ejemplo, en la proposición 7.8, donde se prueba igualdad de manera indirecta con una contención más la igualdad en cardinalidad para obtener la otra contención.
- Es intuitivo ya que al sumar cardinalidades se está contando 2 veces los elementos en la intersección, luego se debe quitar una vez los elementos en la intersección para el conteo correcto. Para 3 conjuntos habría que restarle a $|A| + |B| + |C|$ las cardinalidades de intersecciones correspondientes de a pares y luego sumar la de la intersección de los 3 al haber quitado 3 veces la intersección de los 3 conjuntos cuando se restó de a pares.
- Claramente (III) implica (I) y (II). Para el recíproco es que se usa la equivalencia.
- Si no hay finitud, falla la demostración indirecta de contención por igual cardinal. Por ejemplo, se verá que $|\mathbb{R}| = |[0, 1]|$ y claramente $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ pero no son iguales.
- (II) se comentó antes y (I) es muy útil pues es más flexible que la proposición 7.4 la cual es el caso particular con $f : A \rightarrow B$, $f(x) = x$.