Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Lab de Introducción al Álgebra. Primavera 2024.

Séptima sesión

Lectura 1 (20 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, donde las preguntas etiquetadas con • son del tipo de preguntas que usted debe hacerse en su lectura personal del apunte para verificar si está comprendiendo lo que está leyendo. Además, dé un ejemplo de cálculo de algún coeficiente binomial usando la proposición 6.7 y otro donde una suma (como $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$) quede expresada como un número conocido elevado a n (como $2^n = (1+1)^n$)

6.3 Coeficientes binomiales

A continuación vamos a estudiar una familia de números que se conocen con el nombre de coeficientes binomiales • ¿qué me dice este nombre? que tienen propiedades e interpretaciones interesantes (por razones de tiempo, no discutiremos estas últimas). • ¿cuáles serán?

Definición 6.6 (Coeficiente binomial) Para dos enteros n y k, $0 \leq k \leq n$, se define

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{(se lee “ene sobre ka”).}$$

• ¿recuerdo como se define $n!$? ¿puedo calcular $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$, $\binom{3}{2}$, etc.? ¿qué tipo de número es $\binom{n}{k}$? ¿por qué se usará esa notación para ese número?

Adoptaremos la siguiente convención: Si $k < 0$ o $k > n$, entonces $\binom{n}{k} = 0$. • ¿en qué situaciones iremos a necesitar esto?

Proposición 6.7 Para n y k enteros, $n \geq 0$,

(I) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(II) Identidad de Pascal: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. • ¿qué utililidad puede tener la proposición?

Binomio de Newton

En esta sección encontraremos una fórmula para $(x+y)^n$ que generaliza la fórmula del **cuadrado de binomio:** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Una forma de entender este resultado es codificar expresiones de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$ por sus coeficientes $(a_k)_{k=0}^{n}$. Por ejemplo, para $n = 2$ y $n = 3$ tenemos

$n = 2$		x^2	xy	y^2
$x(x+y) = x^2 + xy$		1	1	0
$(x+y)y = xy + y^2$		0	1	1
$x^2 + 2xy + y^2$		1	2	1

$n = 3$	x^3	x^2y	xy^2	y^3
$x\left(x^2 + 2\mathbf{xy} + y^2\right) = x^3 + 2\mathbf{x^2y} + xy^2$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{0}$	0
$\left(\mathbf{x^2} + 2xy + y^2\right)y = \mathbf{x^2y} + 2xy^2 + y^3$	0	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{0}$
$x^3 + 3\mathbf{x^2y} + 3xy^2 + y^3$	$\binom{3}{3}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{0}$

• ¿Por qué se consideran las expresiones $x(x+y)$, $(x+y)y$ para $n = 2$ y $x(x^2+2xy+y^2)$, $(x^2+2xy+y^2)y$ para $n = 3$? ¿son correctos los valores de la tabla para $n = 3$? ¿se pueden escribir de manera similar (usando coeficientes binomiales) los números en la tabla para $n = 2$?

Los dos casos anteriores tienen un claro patrón. Por ejemplo, el coeficiente que acompaña al producto x^2y en $(x+y)^3$ • ¿dónde está $(x+y)^3$ en la tabla? es la suma de 2 con 1, que son el coeficiente que acompaña a xy y el coeficiente que acompaña a x^2 en $(x+y)^2$, respectivamente. De esta forma no es demasiado sorprendente que la fórmula general quede expresada en términos de los coeficientes binomiales que en el caso que estamos discutiendo • ¿cuál? es $\binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$.

Teorema 6.8 (Binomio de Newton) Sean $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dem. Probémoslo por inducción en $n \in \mathbb{N}$. Primero analicemos el caso base, $n = 0$. Por un lado $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$ (Aquí suponemos que $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$) y por otro $(x+y)^0 = 1$. Es decir, la propiedad se cumple para $n = 0$. Sea entonces $n \geq 0$ tal que se tiene que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ (H.I.). Probemos que se tiene el teorema para $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n && \text{(definición de potencia)}\\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k && \text{(hipótesis de inducción)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+y)x^{n-k}y^k && \text{(constantes salen y entran de una sumatoria)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} && \text{(distributividad en } \mathbb{R} \text{ y aditividad)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k && \left(\text{agregamos } 0 = \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k && \text{(aditividad)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k && \text{(identidad de Pascal)}
\end{aligned}$$

De donde se concluye el teorema.

• ¿Entendí cada paso a cabalidad? de no ser así ¿qué es **exactamente** lo que no entendí? A continuación veremos algunos ejemplos donde el teorema del Binomio de Newton es útil.

Ejemplo: Calculemos $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Esta suma resulta ser una aplicación directa del teorema del Binomio de Newton. Utilizando que $1^m = 1$ para cualquier $m \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Así, por teorema del Binomio de Newton, se tiene que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$. • ¿el ejemplo será dado solo porque es una aplicación directa del teorema o será interesante por alguna otra razón? ¿qué pasa si considero otros números x, y con suma conocida?

Trabajo de pares (5 min.) Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

Lectura 2 (20 min.) En esta lectura, dé ejemplos de conjuntos finitos de 100 elementos y biyección explícita entre ellos.

Conjuntos finitos

En esta sección queremos definir formalmente qué es un conjunto finito • ¿para qué? y establecer algunos resultados básicos que nos permitan comparar sus tamaños y contar la cantidad de sus elementos.

Antes de proceder recordemos que si $n \in \mathbb{N}$, denotabamos por [1..n] el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, y convenimos que $[1.,0] = \emptyset$.

Definición 7.1 *Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distintos entre si (i.e., $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$) tales que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. En este caso diremos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una enumeración de A, que el cardinal de A es n y lo denotaremos por $|A| = n$.*

• ¿qué significa "i.e."? ¿cómo compruebo que el conjunto $A = \{gato, \pi, \triangle\}$ es finito?

Proposición 7.2 *Para todo conjunto $A, |A| = 0$ si y sólo si $A = \emptyset$.* • ¿demostración?

Las siguientes propiedades son particularmente útiles para establecer que ciertos conjuntos tienen cardinalidad finita a partir de otros conjuntos cuya cardinalidad se sabe que es finita.

Proposición 7.3 *Si A es un conjunto finito y $f : A \to B$ es biyectiva, entonces B es un conjunto finito y $|A| = |B|$.*

Dem. Basta notar que si $a_1, \ldots, a_n$ es una enumeración de A, entonces $b_1 = f(a_1), \ldots$, $b_n = f(a_n)$ es una enumeración de B. Por definición de conjunto finito sigue que B es conjunto finito y $|B| = n = |A|$.

• ¿en qué situación me podría resultar útil este resultado? ¿sirve para la biyección f... que conozco? si no es así, ¿puedo modificar el dominio y codominio para obtener una biyección de conjuntos finitos?

Proposición 7.4 *Sea B un conjunto finito. Si $A \subseteq B$, entonces A es finito y $|A| \leq |B|$.*

Dem. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $|B| = n$ y $b_1, \ldots, b_n$ una enumeración de B. Si $A = \emptyset$, el resultado es obvio. Supongamos entonces que $A \neq \emptyset$. Si $A \subseteq B$, entonces existen $k \in [1..n]$ y $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ tales que $A = \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}$. Luego, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $a_j = b_{i_j}$ es una enumeración de A y $|A| = k \leq n = |B|$.

• ¿en qué situación me podría resultar útil este resultado?

Ahora podemos deducir fácilmente propiedades intuitivas que cumplen los conjuntos finitos.

Proposición 7.5 (Cardinal de la unión disjunta) *Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.* • ¿qué significa "unión disjunta"?

Dem. Por definición de cardinalidad sabemos que existen $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_m$ enumeraciones de A y B, respectivamente. Para $i \in \{1, \ldots, n+m\}$ definimos,

$$c_i = \begin{cases} a_i, & \text{si } i \leq n \\ b_{i-n}, & \text{si } i > n \end{cases}$$

Como A y B son disjuntos, sigue que $c_1, \ldots, c_{n+m}$ son distintos entre sí, por lo que forman una enumeración de $A \cup B$. Luego, concluimos que $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$.

• ¿entiendo la construcción de la enumeración $c_1, ..., c_{n+m}$ de $A \cup B$? si no es totalmente clara, ¿la puedo hacer explícita, es decir, $c_1 =, ..., c_5 =$ para $n = 2$, $m = 3$?

Corolario 7.6 (Cardinal de la diferencia) *Si $B \subseteq A$ y A es finito, entonces $|A\backslash B| = |A| - |B|$. En particular, $|B| \leq |A|$ y, si $|A| = |B|$, entonces $B = A$.*

Dem. Sabemos que $A = (A\backslash B) \cup B$ y de la Proposición 7.4 que $A\backslash B$ es finito.• ¿por qué? Entonces, de la Proposición 7.5 obtenemos que $|A| = |(A\backslash B) \cup B| = |A\backslash B| + |B|$.

La segunda afirmación es inmediata pues $|B|+|A\backslash B| = |A|$ y $|A\backslash B| \geq 0$. La tercera sigue de lo anterior pues si $|A| = |B|$, entonces $|A\backslash B| = 0$. Por lo tanto, de la Proposición 7.2 sabemos que $A\backslash B = \emptyset$ con lo que $A = B$.

• ¿en qué situación me podría resultar útil este resultado?

La siguiente fórmula permite calcular el cardinal de una unión cualquiera de dos conjuntos finitos. Su generalización a n conjuntos escapa del alcance de este curso.

Proposición 7.7 (Cardinal de la unión) *Si A y B son conjuntos finitos, entonces* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Dem. Usamos las igualdades $A \cup B = A \cup (B\backslash A)$ y $B\backslash A = B\backslash(A \cap B)$ • ¿están claras?. Como $A\backslash B$ es subconjunto de B, de la Proposición 7.4 sabemos que $A \cap B$ y $B\backslash(A \cap B)$ son finitos. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B\backslash(A \cap B)| = |A| + |B| - |A \cap B|$, donde la primera igualdad es por la Proposición 7.5 y la segunda es el corolario anterior.

• ¿es intuitivo este resultado? de ser así ¿cómo generalizar para unión de 3 conjuntos?

Terminamos esta sección con un par de relaciones interesantes entre inyectividad y epiyectividad de funciones entre conjuntos finitos y sus cardinales.

Proposición 7.8 *Sean A y B conjuntos finitos con $|A| = |B|$ y sea $f : A \to B$ función. Las siguientes afirmaciones son todas equivalentes:*

(I) f es inyectiva.

(II) f es epiyectiva.

(III) f es biyectiva.

Dem. Basta demostrar que se tiene (I) si y sólo si se tiene (II), pues ello implica que (III) es equivalente a cualquiera de las otras partes. • ¿por qué?

Supongamos primero que f es inyectiva. Observar que $h : A \to f(A)$ tal que $h(a) = f(a)$ es biyección. Luego, por Proposición 7.3 e hipótesis, $|f(A)| = |A| = |B|$. Como $f(A) \subseteq B$, por el Corolario 7.6, se concluye que $f(A) = B$. De la Proposición 4.19 se concluye que f es epiyectiva.

Recíprocamente, nuevamente por Proposición 4.19, si f es epiyectiva, entonces $f(A) = B$. Sea $g : B \to A$ definida como sigue: para cada $b \in B$ sea $g(b)$ cualquier elemento de A tal que $f(g(b)) = b$. La función $g : B \to A$ cumple que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Esto y la parte (IV) de la Proposición 4.14 nos permite concluir que g es inyectiva. Aplicamos lo demostrado en el párrafo anterior a $g : B \to A$ y obtenemos que g es epiyectiva, por lo tanto, es biyectiva. Así, g posee inversa. Como $f \circ g = \mathrm{id}_B$, parte (v) de la Proposición 4.14, sabemos que esta inversa es f. De esta forma f es biyectiva, en particular es inyectiva.

• ¿en qué falla la demostración si no hay finitud? ¿entiendo laa construcción de g?

Proposición 7.9 Sean A y B conjuntos, donde B es conjunto finito. Se cumple que:

(I) A es finito y $|A| \leq |B|$ si y sólo si existe $f : A \to B$ inyectiva.

(II) A es finito y $|A| = |B|$ si y sólo si existe $f : A \to B$ biyectiva.

• ¿cómo se podría usar este resultado?

Trabajo de pares (5min). Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.