Ejercicio.

a) (3 ptos.) Encuentre $[0]_{\mathcal{R}}$, $[\pi]_{\mathcal{R}}$ y el conjunto cuociente para la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ de la lectura 1, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(a) = f(b)\}$, para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x]$ (la función parte entera, es decir, $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x).

Solución:

$$[0]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x\mathcal{R}0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = f(0)\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, [x] = 0\} = [0,1).$$

De manera similar,

$$[\pi]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x\mathcal{R}\pi\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = f(\pi)\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, [x] = 3\} = [3,4).$$

Generalizando, se obtiene que si $x \in [n, n+1)$, con $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, [x] = n\} = [n, n+1) = [n]_{\mathcal{R}}.$$

Así, $A/\mathcal{R} = \{[n]_{\mathcal{R}} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

Para revisión: 1 punto por clase y un punto por el cuociente.

b) (3 ptos.) Use que $2k3^k = ((k+1)3^{k+1} - k3^k) - 3^{k+1}$ para calcular $\sum_{k=0}^{10} k3^k$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{10} k3^k &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}[((k+1)3^{k+1} - k3^k) - 3^{k+1}] \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{10}((k+1)3^{k+1} - k3^k) - \sum_{k=0}^{10} 3^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}(11 \cdot 3^{11} - 0) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3^{11} - 1}{3 - 1} \\
&= 3^{11}\left(\frac{11}{2} - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \\
&= \frac{19 \cdot 3^{11} + 3}{4} = 841.449
\end{aligned}$$

Para revisión: un punto por la telescópica, 1 por la geométrica y 1 por separar las sumatorias, ajustar la constante en la geométrica y dar el número correspondiente (no importa que lleguen a las dos últimas igualdades).