Sexta sesión

Lectura 1 (20 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, donde las preguntas etiquetadas con • son del tipo de preguntas que usted debe hacerse en su lectura personal del apunte para verificar si está comprendiendo lo que está leyendo. Además, dé un ejemplo de relación de equivalencia y su respectivo conjunto cociente.

5.2 Relaciones de equivalencia

Nos concentraremos ahora en el estudio más detallado de las relaciones de equivalencia • ¿por qué se llaman así?, o sea, las relaciones que son reflejas, simétricas y transitivas.• ¿Qué es una relación? ¿qué significa que sea refleja, simétrica y transitiva? ¿qué relaciones de equivalencia conozco para tener en mente como ejemplo?

Lo que se pretende con una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A es definir un criterio de semejanza entre los elementos de A que permita clasificarlos. Los elementos semejantes a un elemento dado $a \in A$, son todos aquellos que se relacionan con a. • ¿cuál/es sería/n el/los elemento/s relacionados a $a = ...$ en alguna de las relaciones de equivalencia que tengo en mente?

Definición 5.6 (Clase de equivalencia) Dado un elemento $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a asociada a $\mathcal{R}$ como el conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\} \subseteq A$$

Ejemplo: Veamos cuáles son las clases de equivalencia de algunas de las relaciones de equivalencia que hemos estudiado en ejemplos anteriores.

- $\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid f(a) = f(b)\}$ en $A \neq \emptyset$: • ¿cómo es $\mathcal{R}$ para $f = ...$ y $A = ...$? La clase de equivalencia de $a \in A$ es $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A \mid f(b) = f(a)\}$. Es decir, $[a]_{\mathcal{R}}$ es la pre-imagen por f de $\{f(a)\}$.• ¿por qué? ¿cómo es para $a = ...$ con f, A que dije arriba? Para hacerlo más concreto, consideremos la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de las palabras de un libro donde a y b están relacionadas si comienzan con la misma letra. • ¿es efectivamente relación de equivalencia?

  Calculemos en este caso las clases de equivalencia de algunas palabras: la clase $[hola]_{\mathcal{R}}$ es el conjunto de todas las palabras del libro que comienzan con h, mientras que $[\text{casa}]_{\mathcal{R}}$ es el conjunto de todas las palabras que comienzan con c. En este ejemplo, notemos que podemos escribir

  $$A = [\text{ ahora }]_{\mathcal{R}} \cup [\text{ bote }]_{\mathcal{R}} \cup [\text{ casa }]_{\mathcal{R}} \cup \ldots \cup [\text{ zorro }]_{\mathcal{R}} \bullet \text{ ¿entiendo bien la igualdad?}$$

  Además, se tiene que $[\text{ tapa }]_{\mathcal{R}} \cap [\text{ velero }]_{\mathcal{R}} = \emptyset$ • ¿por qué?, y que $[\text{ manzana }]_{\mathcal{R}} = [\text{ menos }]_{\mathcal{R}}$.• ¿por qué?

- Veamos ahora cuáles son las clases de equivalencia de la relación $\equiv_3$. Recordemos que ésta está dada por $p \equiv_3 q$ si $p - q = 3k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. • ¿por qué es relación de equivalencia? La clase de equivalencia de 0 es el conjunto $\{q \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, q = 3k\}$. Es decir, el conjunto de los múltiplos de 3 en $\mathbb{Z}$.

La clase de equivalencia de 1 es el conjunto $\{q \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, q-1=3k\}$. Éste es el conjunto de los múltiplos de 3 más 1• ¿por qué?. Notemos que las clases de equivalencia del 0 y del 1 no tienen elementos en común pues no hay ningún entero que sea múltiplo de 3 y a la vez múltiplo de 3 más 1. • ¿lo puedo demostrar? Debiese ser claro ahora que si tomamos $p \in \{0,1,2\}$, entonces la clase de equivalencia de p es el conjunto de los múltiplos de 3 más p. ¿Cuál es la clase de equivalencia de 3? Si leemos con cuidado la definición de la relación $\equiv 3$ nos daremos cuenta que esta clase es la misma que la del 0 , es decir, el conjunto de los múltiplos de 3. • ¿por qué? De aquí podemos ver • ¿cómo? que esta relación tiene sólo 3 clases de equivalencia: $[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}$ y $[2]_{\equiv_3}$, y éstas son disjuntas de a pares. • ¿qué significa “disjuntas a pares”? Más aún, como cada entero pertenece a (sólo) una de ellas, el conjunto $\{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$. • ¿qué es una partición de un conjunto? ¿por qué $\{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$?

Los ejemplos anteriores sugieren que el conjunto de las clases de equivalencia tiene propiedades relevantes que es deseable destacar.• ¿cuáles?

Definición 5.7 (Conjunto cuociente) Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cuociente • ¿por qué se llamará así?, y se denota $A/\mathcal{R}$. Esto es,

$$A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

Notemos que los conceptos de clase de equivalencia y conjunto cuociente tienen perfecto sentido para cualquier relación. En el contexto de las relaciones de equivalencia, el conjunto cuociente posee una propiedad destacable que ha aparecido en los ejemplos anteriores y que demostraremos a continuación: el conjunto $A/\mathcal{R}$ es una partición de A. • ¿cómo serían las clases y el conjunto cociente para una relación que no es de equivalencia?

Proposición 5.8 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Para todo $x, y \in A$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(I) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$.

(II) $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$

(III) $x\mathcal{R}y$.

En particular: $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$. • ¿por qué esto es “en particular”?

Dem. Demostraremos que (I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (I) que, por la transitividad del $\Rightarrow$, implicará la equivalencia de las tres propiedades.• ¿cómo? Sean $x, y \in A$ arbitrarios. Como $\mathcal{R}$ es refleja se tiene que $x \in [x]_{\mathcal{R}}$. Así, es claro que (I) $\Rightarrow$ (II) . • ¿es realmente claro? Veamos que (II) $\Rightarrow$ (III) Sea $z \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$. Entonces, $x\mathcal{R}z$ e $y\mathcal{R}z$. Por la simetría de $\mathcal{R}$ se obtiene que $z\mathcal{R}y$. Por la transitividad de $\mathcal{R}$ se concluye que $x\mathcal{R}y$. Ahora, probemos que (III) $\Rightarrow$ (I): Por la simetría tenemos que $y\mathcal{R}x$. Sea $z \in [x]_{\mathcal{R}}$ y probemos que $z \in [y]_{\mathcal{R}}$. Por la definición de $[x]_{\mathcal{R}}$ se cumple que $x\mathcal{R}z$. Como ya sabemos que $y\mathcal{R}x$ podemos invocar la transitividad de $\mathcal{R}$ para concluir que $y\mathcal{R}z$, lo que muestra que $z \in [y]_{\mathcal{R}}$. Por lo tanto, $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$. Con lo que ya se demostró se tiene que $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ equivale a $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$ y $[y]_{\mathcal{R}} \subseteq [x]_{\mathcal{R}}$.• ¿cómo? Como esto último equivale a $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$, se termina la demostración.

Trabajo de pares (5 min.) Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

Lectura 2 (20 min.) En esta lectura, dé ejemplos de secuencias, uso de la notación de sumatoria y suma telescópica.

Sumatorias

En esta sección formalizaremos el significado de calcular la suma: $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, donde a_i son números reales.• ¿cómo formalizar? ¿cómo no es formal lo anterior? Veremos que este formalismo recupera todos los manejos intuitivos y nos entrega una herramienta muy eficaz para manipular estas sumas. En cierto modo, veremos que el referido formalismo puede ser considerado como simple notación, y posteriormente veremos como trabajar y manipular esta útil nueva notación.

6.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 6.1 (Secuencia de números reales) Una secuencia de números reales es una función $a : I \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq \mathbb{N}$. Por comodidad, una secuencia también se anotará $a = (a_i)_{i\in I}$, donde $a_i = a(i)$, para todo $i \in I$. • ¿ejemplo de secuencia de números reales?

Si el conjunto de índices $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq m\}$, denotaremos la secuencia $(a_i)_{i\in I}$ por $(a_i)_{i\geq m}$. Cuando trabajemos con una secuencia $(a_i)_{i\in I}$, asumiremos $a_i = 0$ si $i \notin I$.• ¿para qué? Es importante notar que $a = (a_i)_{i\in I} = (a_j)_{j\in I} = (a_x)_{x\in I}$. Es decir, i, j y x son índices mudos. Sea $(a_i)_{i\in I}$ una secuencia de números reales. Como acabamos de decir, en esta sección estudiaremos propiedades y métodos de cálculo para las sumas de los elementos a_i con $i \in I$. Introduciremos para este efecto una notación especial: $\sum_{i\in I} a_i$. Al símbolo $\sum$ lo llamaremos sumatoria. • ¿por qué ese símbolo? Partiremos considerando $I = [m..n] = \{m, \ldots, n\}$[1] Formalmente,

Definición 6.2 (Sumatoria) Sea $(a_i)_{i\geq m}$ una secuencia de números reales. Para $n \geq m$, definimos la sumatoria de los términos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$, por la siguiente recurrencia:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k, & \text{si } n > m \end{cases}$$ • ¿qué ganamos con esta definición?

Tomaremos como convención que $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ para $n < m$.

Ejemplo: El segundo ejemplo que dimos del principio de inducción nos mostró que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. Considerando la secuencia $(k)_{k\geq 1}$, lo podemos escribir como $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$. La sumatoria cumple la siguiente lista de propiedades:

Proposición 6.3 Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, y sean $(a_k)_{k\geq m}, (b_k)_{k\geq m}$ dos secuencias. Para todo $n \geq m$ se tiene:

(1) $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$. (Secuencia constante igual a 1)

(2) $\sum_{k=m}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$. (Factorización de constantes)

(3) $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$ (Sumatoria de dos secuencias)

(4) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s} = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s}$. (Traslación de índices, para $s \in \mathbb{N}$)

(5) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$. (Separación del conjunto de índices, para $m \leq s < n$)

(6) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$. (Propiedad telescópica.)

[1] Si $n < m$, entonces $[m..n] = \emptyset$.

• ¿cómo se escribirían las propiedades arriba sin sumatoria? ¿por qué les llaman así a las propiedades? **Dem.** Demostraremos (1) y (6). Para (1): Lo haremos usando el principio de inducción sobre $n \geq m$. El caso base ($n = m$) corresponde a $\sum_{k=m}^{m} 1 = (m - m + 1)$. Esto es directo, pues ambos lados valen 1. Supongamos ahora que $\sum_{k=m}^{n} 1 = (n - m + 1)$. Entonces

$$\sum_{k=m}^{n+1} 1 = 1 + \sum_{k=m}^{n} 1 = 1 + (n - m + 1) = (n + 1) - m + 1$$

Para (6): Nuevamente aplicaremos el principio de inducción sobre $n \geq m$. Si $n = m$, el resultado se reduce a demostrar que $\sum_{k=m}^{m} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{m+1}$, lo cual es directo gracias a la definición de sumatoria. Supongamos ahora que $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$. Entonces

$$\sum_{k=m}^{n+1} (a_k - a_{k+1}) = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_m - a_{n+1}) = a_m - a_{n+2}$$

donde la segunda igualdad es válida por la hipótesis de inducción. • ¿y la primera igualdad? En los siguientes ejemplos veremos cómo las propiedades anteriores nos ayudan a calcular sumatorias.

Ejemplo (sumatoria de una progresión geométrica): • ¿qué es una progresión geométrica? Verifiquemos que $\sum_{i=0}^{n} r^i = \left(r^{n+1} - 1\right)/(r - 1)$, para $r \neq 1$. • ¿qué pasa si $r = 1$?

Tenemos que para todo $i \geq 0, r^{i+1} - r^i = r^i(r - 1)$. • ¿por qué? ¿cómo se me podría ocurrir a mí hacer esto? Para $r \neq 1$, lo anterior implica que $\left(r^{i+1} - r^i\right)/(r - 1) = r^i$ (*). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} r^i &= \sum_{i=0}^{n} \left(r^{i+1} - r^i\right)/(r - 1) && \text{(igualdad (*))} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \left(r^{i+1} - r^i\right)\right)/(r - 1) && \text{(constantes salen de una sumatoria)} \\
&= \left(r^{n+1} - r^0\right)/(r - 1) && \text{(propiedad telescópica)} \\
&= \left(r^{n+1} - 1\right)/(r - 1) && \left(r^0 = 1\right)
\end{aligned}$$

• ¿cómo sería el cálculo si la suma no parte de $i = 0$? ¿cómo se ve para un r y n particular?

Ejemplo: Calculemos $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Podemos hacer el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) && \left(\text{uso de la igualdad } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} && \text{(propiedad telescópica)}
\end{aligned}$$

• ¿cómo se me podría ocurrir a mí hacer esto?

Ejemplo: Calculemos $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$. Consideremos la igualdad $(k+1)! = (k+1)k! = k \cdot k! + k!$, con la que obtenemos que $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.• ¿cómo se me podría ocurrir a mí hacer esto?

Sumando ambos lados de la igualdad de $k = 0$ a $k = n$, llegamos a

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

donde la segunda igualdad es por propiedad telescópica.

Trabajo de pares (5min). Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.