PAUTA

Ejercicio. Considere la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida mediante $f(a) = a^2 - a$.

- a) (2 ptos.) Calcule la imagen del conjunto $\{1, 3\}$ por la función, es decir, calcule $f(\{1, 3\})$.

Solución: $f(\{1, 3\}) = \{f(a) \in \mathbb{Z} \mid a \in \{1, 3\}\} = \{f(1), f(3)\} = \{0, 6\}$.

Un punto por cada caso.

- b) (2 ptos.) Calcule la preimagen del conjunto $\{0, 2\}$ por la función, es decir, calcule $f^{-1}(\{0, 2\})$.

Solución: $f^{-1}(\{0, 2\}) = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) \in \{0, 2\}\}$. Ahora, $f(a) \in \{0, 2\} \iff f(a) = 0 \vee f(a) = 2$. Por una parte, $f(a) = 0 \iff a^2 - a = 0 \iff a(a - 1) = 0 \iff a = 0 \vee a = 1$. Por otra parte, $f(a) = 2 \iff a^2 - a = 2 \iff a^2 - a - 2 = 0 \iff a = -1 \vee a = 2$. Por lo tanto $f^{-1}(\{0, 2\}) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Un punto por cada preimagen (del 0 y del 2).

- c) (2 ptos.) Defina la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ mediante

$$a\mathcal{R}b \iff 2f(a) \equiv_3 f(2b).$$

Determinar si $1\mathcal{R}4$ y si $-3\mathcal{R}0$.

Solución: $1\mathcal{R}4 \iff 2f(1) \equiv_3 f(8) \iff 0 \equiv_3 56 \iff 56$ es múltiplo de 3. Por lo tanto 1 no está relacionado con 4. Análogamente, $-3\mathcal{R}0 \iff 2f(-3) \equiv_3 f(0) \iff 12 \equiv_3 0 \iff 12$ es múltiplo de 3. Por lo tanto -3 está relacionado con 0.

Un punto por cada caso.