Quinta sesión

Lectura 1 (20 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, donde las preguntas etiquetadas con • son del tipo de preguntas que usted debe hacerse en su lectura personal del apunte para verificar si está comprendiendo lo que está leyendo. Además, dé un ejemplo de función y calcule la imagen y preimagen de ciertos conjuntos.

4.5 Conjuntos imagen y preimagen

Si $f : A \to B$ es una función, y si $y = f(x)$, decimos que y es **imagen** de x a través de f, y que x es **preimagen** de y a través de f. Como f es una función, tenemos que $\forall x \in A, \exists!\, y \in B, y = f(x)$. Esto nos dice que cada $x \in A$ posee una única imagen $y \in B$. Sin embargo, los elementos $y \in B$ pueden tener varias preimágenes distintas,• ¿pueden no tener preimagen? como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Tomemos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = (n-10)^2$. Se tiene que 36 es la imagen por f de 4 , pues $f(4) = 36$. A su vez, tenemos que 4 es preimagen de 36 . Pero también $f(16) = 36$, por lo que 16 también es preimagen de 36 . Es fácil observar • ¿cómo? que 36 no tiene más preimágenes que estas dos, así que podemos decir que $\{4, 16\}$ es el conjunto de preimágenes de 36. Del mismo modo, $\{5, 15\}$ es el conjunto de preimágenes de 25, y $\{10\}$ es el conjunto de preimágenes de 0 • ¿por qué?. Podemos reunir estos conjuntos de preimágenes: $\{4, 5, 10, 15, 16\}$ es la unión de las preimágenes de los elementos de $\{0, 25, 36\}$.

También está el caso del natural 2, el cual no tiene preimágenes por f (esto se observa dado que $f(n)$ siempre es un cuadrado perfecto, y 2 no lo es). En este caso decimos que el conjunto de preimágenes de 2 es $\emptyset$ (el conjunto vacío). • ¿cuáles serán todos los naturales que no tienen preimagen? ¿que tienen solo una? ¿más de una?

Así como obtuvimos el conjunto de todas las preimágenes de ciertos elementos, podemos formar el conjunto de todas las imágenes de una colección de elementos. Como sabemos que $9, 4, 1, 0, 1$ y 4 son respectivamente las imágenes de $7, 8, 9, 10, 11$ y 12 , escribimos: $\{0, 1, 4, 9\}$ es el conjunto obtenido al reunir las imágenes de $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (observar que en el primer conjunto hemos eliminado los elementos repetidos, como corresponde en los conjuntos).

Definición 4.18 (Conjunto imagen) Sea $f : A \to B$ una función, y sea $A' \subseteq A$. Definimos el conjunto imagen de A' por f como

$$f\left(A'\right) = \left\{f(x) \in B \mid x \in A'\right\}, \text{ o equivalentemente, } \forall y \in B, \left(y \in f\left(A'\right) \iff \exists x \in A', f(x) = y\right)$$

• ¿cómo sería $f(A')$ para la función del ej arriba y $A' = ...$? Notemos que $f\left(A'\right)$ siempre es un subconjunto de B. Es el obtenido al reunir todas las imágenes de los elementos de A'.

Proposición 4.20 Sea $f : A \to B$ función. Sean $A_1, A_2 \subseteq A$. Se tiene:

(I) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f\left(A_1\right) \subseteq f\left(A_2\right)$.

(II) $f\left(A_1 \cap A_2\right) \subseteq f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$.

(III) $f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)$.

Dem. Demostraremos (I) y (II), Veamos que se cumple (I), Por hipótesis, se tiene que $A_1 \subseteq A_2$. Luego,

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \{f(x) \mid x \in A_1\} && \text{(definición de conjunto imagen)} \\ &\subseteq \{f(x) \mid x \in A_2\} && (A_1 \subseteq A_2) \\ &= f(A_2) && \text{(definición de conjunto imagen)} \end{aligned}$$

Veamos que se cumple (II), En efecto, sea $y \in B$ arbitrario,

$$\begin{aligned} & y \in f(A_1 \cap A_2) \iff \exists x \in A_1 \cap A_2, y = f(x) \quad \text{(definición de conjunto imagen)} \\ & \iff \exists x \in E, x \in A_1 \cap A_2 \wedge y = f(x) \quad \text{(convención sobre cuantificación sobre conjuntos)} \\ & \iff \exists x \in E, (x \in A_1 \wedge y = f(x)) \wedge (x \in A_2 \wedge y = f(x)) \ \text{(Idempotencia y asociatividad del} \wedge \text{)} \\ & \implies (\exists x \in E, x \in A_1 \wedge y = f(x)) \wedge (\exists x \in E, x \in A_2 \wedge y = f(x)) \ \text{(por Proposicion 1.21)(IV))} \\ & \implies (\exists x \in A_1, y = f(x)) \wedge (\exists x \in A_2, y = f(x)) \ \text{(convención de cuantificación sobre conjuntos)} \\ & \iff y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \ \text{(definición de conjunto imagen)} \\ & \iff y \in f(A_1) \cap f(A_2) \ \text{(definición de} \cap \text{)}. \end{aligned}$$

Como y es arbitrario, se concluye que $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. • ¿puedo demostrar (III)? **Ejercicio:** Queda propuesto mostrar que no se cumple el recíproco. Es decir, mostrar con un contraejemplo que, en general, no se cumple que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Definición 4.21 (Conjunto preimagen) Sea $f : A \to B$ función y sea $B' \subseteq B$. Definimos el conjunto preimagen de B' por f como

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}, \text{ o equivalentemente, } \forall x \in A, (x \in f^{-1}(B') \iff f(x) \in B').$$

Notar que $f^{-1}(B')$ es siempre un subconjunto de A. • ¿$f^{-1}(B')$ es el conjunto imagen de B' por la función inversa de f? Es el obtenido al reunir todas las preimágenes de los elementos de B'. Más aún, $f^{-1}(B')$ queda bien definido siempre, inclusive si f no es biyectiva (en cuyo caso f no sería invertible).

Proposición 4.22 Sea $f : A \to B$ función y sean $B_1, B_2 \subseteq B$. Se tiene:

(I) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(II) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(III) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Dem. Veamos que se cumple (II), Notar que si $x \in A$ es arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 && \text{(definición de conjunto preimagen)} \\ &\iff f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 && \text{(definición de } \cap \text{)} \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) && \text{(definición de conjunto preimagen)} \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) && \text{(definición de } \cap \text{)} \end{aligned}$$

Como x es arbitrario, se concluye que $f(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$. • ¿puedo demostrar (I) y (III)?

Trabajo de pares (5 min.) Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

Lectura 2 (20 min.) En esta lectura, dé ejemplos de relaciones que cumplan solo una de las propiedades estudiadas.

Relaciones

El siguiente concepto que vamos a estudiar es el de relación, en particular las relaciones binarias.• ¿qué quiere decir "binarias"? Estas nos permitirán modelar • ¿a qué se refiere con "modelar"? conceptos como "es mayor que", "es adyacente a", "es divisible por", "precede a", etc. En general, las relaciones son la manera de formalizar matemáticamente que objetos de interés comparten cierta vinculación. Un caso muy particular de las relaciones son las funciones.• ¿cuáles serían los objetos de interés que comparten cierta vinculación en el caso de funciones?

5.1 Definiciones y propiedades generales

Definición 5.1 (Relación) Una tripleta de conjuntos $(A, B, \mathcal{R})$ es una **relación** si cumple $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. • ¿por qué llamarle relación a un subconjunto de un producto cartesiano? Para $(a, b) \in A \times B$, denotaremos $a\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$, y $a\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \notin \mathcal{R}$. El conjunto A se llama el dominio de la relación y el conjunto B el codominio.

En lugar de $(A, B, \mathcal{R})$ **es una relación**, diremos que $\mathcal{R}$ **es una relación en** $A \times B$. En este apunte, el estudio de relaciones en $A \times B$, cuando A y B son arbitrarios, se restringe a lo ya hecho en el capítulo de las funciones, que por cierto son un tipo de relaciones.• ¿por qué las funciones son relaciones?

En lo que sigue consideraremos sólo relaciones donde $A = B$.• ¿qué tiene de especial este caso? En este caso, diremos que $\mathcal{R}$ **es una relación en** A, en lugar de decir que $\mathcal{R}$ **es una relación en** $A \times A$.

Ejemplo:

▪ El orden de los números reales, $\leq$, es una relación en $\mathbb{R}$, interpretando $\leq$ como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$. • ¿por qué es relación en $\mathbb{R}$?

▪ Para $A \neq \emptyset$ no vacío y $f : A \to B$ una función dada, el conjunto $\{(a, b) \in A \times A \mid f(a) = f(b)\}$ es una relación en A. • ¿qué pasa si $A = \emptyset$? ¿por qué es relación? ¿qué sentido tiene ésta relación en particular? ¿cómo es para alguna f conocida?

Ejemplo: También se suele definir una relación de manera menos formal mediante una descripción con palabras.

▪ Congruencia módulo 3: $p \equiv_3 q$ si p y q son enteros tales que $p - q = 3k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\equiv_3$ es una relación en $\mathbb{Z}$ dada por $\left\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}, p - q = 3k\right\}$.• ¿tiene algo de especial éste ejemplo? ¿por qué la notación $\equiv_3$? ¿ejemplo de números relacionados?

▪ Orden alfabético: $a\mathcal{R}b$ si a y b son palabras de un diccionario de español donde a aparece antes que b o bien $a = b$.• ¿$\mathcal{R}$ es relación dónde? ¿ejemplo de palabras relacionadas?

Dada una relación en un conjunto, definimos las siguientes propiedades (al igual que con la inyectividad, epiyectividad y biyectividad de funciones, estas propiedades pueden ser o no cumplidas por cada relación):

Definición 5.2 (Propiedades de relaciones) Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A es

▪**refleja**, si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$.

▪ **simétrica**, si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

▪ **antisimétrica**, si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

▪ **transitiva**, si $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$. • ¿por qué éstas propiedades pueden ser importantes? • los ejemplos anteriores, ¿qué propiedades tienen?

Estudiemos qué propiedades cumplen algunas de las relaciones de los ejemplos anteriores y otros adicionales. **Ejemplo:** Para $A \neq \emptyset$ no vacío y $f : A \to B$ una función dada, la relación $\{(a, b) \in A \times A : f(a) = f(b)\}$: • ¿en esta notación, cuándo $a\mathcal{R}b$?

■ es refleja, porque $f(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. • ¿esto significa que $\forall a \in A$, $a\mathcal{R}a$?

■ es simétrica, porque para todo $a, b \in A, f(a) = f(b)$ equivale a $f(b) = f(a)$.

■ no es antisimétrica si f no es inyectiva pues entonces existen $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(a)$.

■ es antisimétrica si f es inyectiva puesto que si $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(a)$, entonces $a = b$.

■ es transitiva ya que si $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(c)$, entonces $f(a) = f(c)$.

Ejemplo (congruencia): La relación $\equiv_3$ cumple lo siguiente: • ¿recuerdo y entiendo la relación $\equiv_3$?

■ Es refleja puesto que $p - p = 0 = 3 \cdot 0$.

■ Es simétrica ya que $p - q = 3k$ implica que $q - p = 3(-k)$.

■ No es antisimétrica pues $0 \equiv_3 3$ y $3 \equiv_3 0$, sin embargo $0 \neq 3$.

■ Es transitiva porque si $p \equiv_3 q$ y $q \equiv_3 s$, entonces existen k y ℓ tales que $p - q = 3k$ y $q - s = 3\ell$. Por lo tanto, $p - s = 3k + 3\ell = 3(k + \ell)$.

Tipos de relaciones Hay dos grandes familias de relaciones que ocurren con frecuencia en matemáticas: las relaciones de orden y las de equivalencia.

Definición 5.4 (Relación de orden) $\mathcal{R}$ es una **relación de orden** en A, o simplemente un orden en A, si es una relación en A que es refleja, antisimétrica y transitiva. • ¿por qué tiene ese nombre? ¿qué gracia tienen? ¿la relación de orden en los reales $\leq$ es de orden en el sentido de la definición dada? - $x, y \in A$ son **comparables** si se cumple que $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$. • ¿ejemplo? Decimos que $\mathcal{R}$ es un **orden total** si para todo $x, y \in A, x$ e y son comparables.

Definición 5.5 (Relación de equivalencia) $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** en A si es una relación en A que es refleja, simétrica y transitiva. • ¿para qué sirven?

Ejemplo: ■ La relación $\equiv_3$ es refleja, simétrica y transitiva, y no es antisimétrica. Por lo tanto, es una relación de equivalencia y no de orden. • ¿hay relaciones de equivalencia y de orden? ¿de orden y no de equivalencia?

■ Para $A \neq \emptyset$ no vacío y $f : A \to B$ una función dada, la relación $\{(a, b) \in A \times A \mid f(a) = f(b)\}$ cumple lo siguiente: - Si f no es inyectiva, entonces la relación es refleja, simétrica y transitiva pero no antisimétrica. Por lo tanto, es una relación de equivalencia pero no de orden. - Si f es inyectiva, entonces corresponde a la relación $\mathcal{R}_=$ (igualdad), por lo que es de orden y de equivalencia.

■ La relación $\mathcal{R}$ dada por $a\mathcal{R}b$ si a y b son palabras de un diccionario de Español donde a aparece antes que b o bien $a = b$ es un orden total. En efecto, al permitir que $a = b$ se logra que sea refleja. Como no puede ocurrir que una palabra a aparezca antes que una palabra b y que la palabra b aparezca antes que la palabra a, la única forma que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ es que $a = b$, con lo que $\mathcal{R}$ es antisimétrica. Suponiendo que las palabras estudio y trabajo aparecen en el diccionario, entonces estudio$\mathcal{R}$trabajo y trabajo$\mathcal{R}$estudio, lo que muestra que $\mathcal{R}$ no es simétrica. • ¿por qué? Si una palabra a aparece antes que una palabra b y la palabra b aparece antes que una palabra c, se tendrá que la palabra a aparece antes que la palabra c. • ¿qué demuestra esto?. Luego, $\mathcal{R}$ no es una relación de equivalencia pero sí es una relación de orden. Dos palabras que aparecen en un diccionario de Español siempre son comparables • ¿por qué? por lo que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.

Trabajo de pares (5min). Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.