Respuestas a las preguntas

Lectura 1:

- Es el conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, donde el par ordenado (a, b) es el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, pero lo que importa es que con esta construcción, importa el orden de los elementos, es decir $(a, b) \neq (b, a)$ y $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$.
- (A, B, G) es un elemento del producto cartesiano $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(A \times B)$, donde $A \subset E$, $B \subseteq F$, con E, F universos de referencia.
- Si hubiera más de un $b \in B$, digamos $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \neq b_2$ asociado a un $a \in A$, entonces tendríamos que especificar ambos pares (a, b_1) y (a, b_2) de alguna manera ya que si escribimos $b = f(a)$, en principio no sabríamos si se está hablando de $b = f(a) = b_1$ o $b = f(a) = b_2$. La notación hace referencia al nombre de la función y al nombre del elemento correspondiente a la primera coordenada del par. Podrían usarse otras notaciones, las cuales deberían hacer referencia a la primera coordenada, pero la usada es cómoda por todas las operaciones que luego se hacen con funciones. En particular, cuando variamos $a \in A$ y cuando hacemos interactuar distintas funciones para un mismo $a \in A$.
- Si no fuera único, tendríamos (n, p_1) y (n, p_2) en G con $p_1 \neq p_2$. Pero por definición de G, $p_1 = 2n = p_2$.
- $g(0) = 0$, $g(\sqrt{2}) = 1$, $g(-\pi) = -4$.
- Una función que deja todo igual podría tener la importancia de un número que deja todo igual con respecto a una operación, es decir, podría ser un neutro con respecto a alguna operación. De hecho, esa función es el neutro respecto de la composición de funciones.
- El conjunto corresponde a una circunferencia de radio 1 y centro en el origen.
- Como $y^2 = 1 - x^2$, se debe cumplir que $1 - x^2 \geq 0$, es decir, $|x| \leq 1$.
- Es lo más grave ya que lo otro se puede subsanar achicando el dominio de la función.
- Si $-1 < x < 1$, entonces $y^2 = 1 - x^2 > 0$ y por lo tanto $(x, \sqrt{1 - x^2})$ y $(x, -\sqrt{1 - x^2})$ están en G.
- Aquí no se dió y "despejado" de la ecuación que lo relaciona con x y el hecho de que estuviera al cuadrado, hace que tengamos $y^2 = (-y)^2$ para $y \neq -y$ si $y \neq 0$.
- Lo anterior me permite dar más ejemplos, basta escribir $y^2 = f(x)$, con $f(x) = x$, $f(x) = x^3 - |x| + 8$, etc.
- No es el caso general, pero nos da la idea de que si podemos despejar y de una ecuación del tipo $F(x, y) = c$, entonces $y = f(x)$ define una función.
- 3-tuplas son iguales si son iguales las coordenadas correspondientes, es decir, $(A, B, G_f) = (C, D, G_g) \iff A = B$, $B = D$ y $G_f = G_g$.
- El conjunto se denota así pues, si A es finito, entonces hay una correspondencia entre B^A y $B^{|A|} = B \times B \times \cdots \times B$ ($|A|$-veces) y se pueden pensar las funciones como tuplas.

- Como las funciones $f: A \to B$ son 3-tuplas $(A,B,G) \in \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(F)\times\mathcal{P}(A\times B)$ podemos definir $B^A = \{(A,B,G) \in \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(F)\times\mathcal{P}(A\times B) : G \subseteq A\times B, \forall a \in A, \exists! b \in B, (a,b) \in G\}$.
- $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ función}\}$, luego tenemos algunos elementos $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ dados por $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, etc.

Lectura 2:

- El problema al inicio: dado y en el codominio de f, ¿existe x en el dominio tal que $y = f(x)$?
- Son equivalentes porque una implicancia es la contrapositiva de la otra.
- Basta con eso porque la negación de la proposición (propiedad de ser inyectiva) es $\exists x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$ (la negación de $p \Rightarrow q$ es $p \wedge \bar{q}$).
- Arbitrarios es que no satisfacen ninguna propiedad aparte de ser elementos del conjunto en cuestión.
- La implicancia $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ siempre se tiene por el hecho de ser f una función.
- Para $A = B = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$ la definición queda $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$. Lo anterior calramente no es cierto para un real $x < 0$, lo que implica la no-epiyectividad de f.
- Salió de despejar x de la ecuación $y = l(x) = ax + b$.
- $l(\frac{y-b}{a}) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y$.
- id_A es inyectiva pues es claro que, como $id_A(x) = x$, se tiene $x_1 = x_2 \iff id_A(x_1) = id_A(x_2)$ y para todo $y \in A$ se tiene $y = id_A(x)$, para $x = y \in A$.
- En un dibujo queda más claro el concepto de "camino inverso", pero lo que se quiere es "deshacer" lo que "hizo" f, es decir, si f envía x en y, entonces g envía y en x.
- Debemos pedir epiyectividad para que se cumpla que todo elemento del codominio tiene un correspondiente elemento en el dominio y la inyectividad para la unicidad de la asignación.
- Los elementos de $G_g \subseteq B \times A$ serán todos los pares ordenados $(b,a) \in B \times A$ tales que $(a,b) \in G_f$, es decir todos los pares ordenados (b,a) tales que $b = f(a)$.
- $G_l = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = l(x) = ax + b\}$, luego $G_g = \{(y,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : (x,y) \in G_l\} = \{(y,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = l(x)\} = \{(y,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = \frac{y-b}{a}\}$, lo que invita a definir $g(y) = \frac{y-b}{a}$.
- Se vió para la función cuadrática.
- Explícitamente $l^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.
- Demostración de (I): Si $x \in A$, por definición de f^{-1} se tiene $f^{-1}(f(x)) = u \Leftrightarrow f(x) = f(u)$, lo que implica, por inyectividad de f, que $x = u$ y por lo tanto $f^{-1}(f(x)) = u = x$.
- $l^{-1}(l(x)) = l^{-1}(ax+b) = \frac{ax+b-b}{a} = x$ y $l(l^{-1}(y)) = l(\frac{y-b}{a}) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y$.

Preguntas para reflexión personal: ¿Me hace sentido este contenido? ¿por qué? ¿me satisface la explicación que dí de la materia? ¿por qué? ¿estaba correcto y me gustó mi ejemplo? ¿por qué? ¿me sirvió la actividad? ¿por qué? ¿voy a tratar de estudiar el apunte (y otros!) como se propone en el lab? ¿por qué?