



Cuarta sesión

Lectura 1 (15 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, donde las preguntas etiquetadas con $\bullet$ son del tipo de preguntas que usted debe hacerse en su lectura personal del apunte para verificar si está comprendiendo lo que está leyendo. Además, dé sus propios ejemplos sobre: una función con dominio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y codominio $\mathbb{Z}$, y una correspondencia que no sea función.

4.1 Introducción

Ya que conocemos el producto cartesiano $A \times B$ entre dos conjuntos A y B $\bullet$ ¿qué es? ¿cómo se define?, podemos definir entre ellos algún tipo de correspondencia. Es decir, asociar de algún modo elementos de A con elementos de B . Una de las posibles formas de hacer esto es mediante una función. Formalmente:

Definición 4.1 (Función) Diremos que la 3-tupla $f = (A, B, G)$ es función de A en B si

- $G \subseteq A \times B$.
- $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$. A G se le llama el grafo de la función f .

- $\bullet$ ¿la 3-tupla (A, B, G) es elemento de qué producto cartesiano?

Podemos entender una función como una regla de asociación que, dado un elemento cualquiera de A , le asigna un único elemento de B . Por unicidad, si $f = (A, B, G)$ es función y $(a, b) \in G$, entonces podemos usar sin ambigüedad la notación $b = f(a)$ $\bullet$ ¿cómo la unicidad permite usar tal notación? ¿por qué usamos esa notación?. O sea, llamamos $f(a)$ al (único) elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$. **Ejemplo:** Si $G = \{(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p = 2n\}$, entonces $f = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, G)$ resulta ser una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, pues a cada natural n estamos asociando un único natural $p = 2n$ $\bullet$ ¿por qué es único?. En vez de referirnos a una función f como una tupla (A, B, G) , usaremos la notación $f : A \rightarrow B$, y daremos la segunda coordenada del par en G cuya primera coordenada es a con una expresión para $f(a)$. Así, la función definida en el ejemplo anterior queda descrita como “ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es la función dada por $f(n) = 2n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.”

Ejemplo:

- Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = p$, donde p es el mayor número entero tal que $p \leq x$ $\bullet$ ¿Entiendo la función? ¿qué sería $g(0)$, $g(\sqrt{2})$, $g(-\pi)$? Aunque aún no tenemos las herramientas para demostrar que g es efectivamente una función $\bullet$ ¿por qué?, podemos intuir que sí lo es: a cada número real x le asociamos el número entero más cercano que sea menor o igual a él. Por ejemplo $g(11/2) = 5$; $g(3) = 3$ y $g(-3/2) = -2$.
- Un ejemplo importante, que utilizaremos después, es la llamada función identidad de un conjunto A . Ésta es la función $\text{id}_A : A \rightarrow A$, que se define por $\text{id}_A(x) = x$, para cada $x \in A$. $\bullet$ ¿por qué podría ser importante?
- En una tienda, cada producto tiene asociado un único precio. Así, podemos definir la función $v : X \rightarrow \mathbb{N}$, donde denotamos por X el conjunto de productos que la tienda dispone, y $v(x)$ es el precio en pesos del producto x . También podemos considerar la función $s : X \rightarrow \mathbb{N}$, donde $s(x)$ es la cantidad de unidades disponibles (el stock) del producto x .

A pesar de que conocemos la definición de función, hay que tener un mínimo de cuidado. Hay objetos que parecen funciones, pero no lo son. Veamos el siguiente ejemplo: Considere el conjunto de puntos $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ • ¿Me parece familiar este conjunto?. Hay dos razones que impiden que $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$ constituya una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

- El valor $f(x)$ no está definido para todos los números reales x , es decir, para algunos $x \in \mathbb{R}$ no existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in G$. A modo de ejemplo, $f(2)$ debería ser el número real y que cumple que $2^2 + y^2 = 1$. Pero, esto equivale a decir que $y^2 = -3$, lo cual es falso para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f no está asociando a $x = 2$ ningún número real. De la misma forma, se puede demostrar • ¿cómo? que $f(x)$ no está definido para cualquier $x \in \mathbb{R}$ que cumpla $x < -1$ o $x > 1$.
- Lo más grave, sin embargo, es que existen números reales x a los cuales f les está asociando más de un valor y • ¿por qué eso es lo más grave?, es decir, para algunos valores de $x \in \mathbb{R}$ existen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 \neq y_2$ y $(x, y_1), (x, y_2) \in G$. En efecto, basta notar que para $x = \frac{3}{5}$, hay dos valores de $y \in \mathbb{R}$ que cumplen $x^2 + y^2 = 1$: éstos son $y_1 = \frac{4}{5}$ e $y_2 = -\frac{4}{5}$ • ¿se cumple efectivamente? De la misma forma • ¿cómo?, se demuestra que f está asociando dos valores distintos a todos los reales x que cumplen $-1 < x < 1$. • ¿que es lo que tuvo distinto este ejemplo de los ejemplos de funciones que conozco que hizo que no fuera función? ¿esto me permite dar más contraejemplos? ¿será la regla general de porqué fallan las asignaciones en ser funciones?

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Al conjunto A le llamaremos **dominio** de f , o **conjunto de partida** de f , y lo denotaremos $\text{Dom}(f)$. De igual modo, al conjunto B le llamaremos **codominio** o **conjunto de llegada** de f , y lo denotaremos $\text{Cod}(f)$. Al grafo de la función f , es decir, al conjunto $\{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\}$, lo denotamos por G_f .

Es importante notar que para definir una función es necesario indicar todos sus elementos: dominio, codominio y grafo. Como hemos dicho, este último se suele dar indirectamente mediante la expresión $f(x)$.

Dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ se dirán iguales si vistas como las 3-tuplas (A, B, G_f) y (C, D, G_g) son iguales • ¿y cuando 3-tuplas son iguales?.

Definición 4.3 (Conjunto de funciones) Sean A y B conjuntos, definimos el conjunto de todas las funciones de A en B por $B^A = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ función}\}$. • ¿por qué se denota así el conjunto? ¿cómo se definiría el conjunto usando un universo de referencia y una función proposicional? ¿cómo serían los elementos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Trabajo de pares (5 min.) Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

Lectura 2 (15 min.) En esta lectura, dé ejemplos de funciones: inyectiva y no epiyectiva, no inyectiva y epiyectiva, ni inyectiva ni sobreyectiva, y biyectiva.

4.2 Funciones inyectivas, epiyectivas, y biyectivas

Consideremos el siguiente problema: Dada una función $f : A \rightarrow B$, y un elemento $y \in B$, se quiere encontrar un $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Por ejemplo consideremos la función $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = x^2$. Notemos que: - Si $y < 0$, entonces no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$. - Si $y = 0$, entonces hay una única solución: $x = 0$. - Si $y > 0$, entonces hay dos soluciones: $x_1 = \sqrt{y}$ y $x_2 = -\sqrt{y}$.

Este ejemplo nos basta para darnos cuenta de que no siempre el problema que nos planteamos tiene solución • ¿de cuál problema estamos hablando?, y que en caso de tenerla, puede tener

más de una. En lo que sigue identificaremos propiedades de la función que nos ayudarán a saber cuándo este problema, para una función $f : A \rightarrow B$ dada, posee soluciones para cualquier $y \in B$, y si estas soluciones son únicas.

Inyectividad

Definición 4.4 (Inyectividad) Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es **inyectiva** si se cumple que

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

O, equivalentemente, si se cumple que

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \bullet \text{¿por qué son equivalentes?}.$$

Notar que para establecer que una función **no** es inyectiva bastará entonces exhibir dos elementos **distintos** x_1 y x_2 , ambos elementos de A , tales que $f(x_1) = f(x_2)$ • ¿por qué basta con eso?

Ejemplo:

- La función $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $l(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ es inyectiva. En efecto, para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

$$\begin{aligned} l(x_1) = l(x_2) &\iff ax_1 + b = ax_2 + b \\ &\iff ax_1 = ax_2 \quad (\text{por definición de } l) \\ &\iff x_1 = x_2 \quad (\text{dividiendo por } a \neq 0 \text{ a ambos lados de la igualdad}) \end{aligned}$$

Como x_1 y x_2 eran arbitrarios • ¿qué significaba “arbitrarios”? concluimos que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, l(x_1) = l(x_2) \implies x_1 = x_2$, por lo que l es inyectiva. • se demostró con equivalencias en lugar de una implicancia, ¿por qué en este caso son equivalencias? ¿hay casos en que no?

- La función $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^2$ **no** es inyectiva pues, tomando $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, se tiene que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$.

Epiyectividad

Definición 4.5 (Epiyectividad) Diremos que $f : A \rightarrow B$ es **epiyectiva** si se cumple que

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

• ¿cómo funciona para $A = \dots, B = \dots, f$ de algún ejemplo anterior? Observar que para establecer que una función no es epiyectiva bastará entonces exhibir un elemento y de su codominio tal que no hay ningún elemento x de su dominio para el cual $f(x) = y$ **Ejemplo:**

- La función $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^2$, **no** es epiyectiva pues para el real $y = -1$ no existe ningún real x tal que $-1 = x^2$. Observemos, también, que la función $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que habíamos definido anteriormente es epiyectiva: En efecto, para $y \in \mathbb{R}$ arbitrario, debemos mostrar que es posible encontrar un $x \in \mathbb{R}$ de modo que $y = l(x)$. Si elegimos el real $x = \frac{y-b}{a}$ • ¿de dónde salió? (recordemos que $a \neq 0$), entonces es fácil verificar que $l(x) = y$ • ¿lo puedo verificar? Como el razonamiento que hicimos es válido para cualquier $y \in \mathbb{R}$, hemos demostrado que l es epiyectiva.

Biyectividad

Definición 4.6 (Biyectividad) Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es biyectiva si es inyectiva y epiyectiva a la vez.

Ejemplo: De los ejemplos previos, sigue que q no es biyectiva pero que l sí lo es. Es sencillo verificar • ¿cómo? que la función identidad $\text{id}_A : A \rightarrow A$ también es biyectiva.

Proposición 4.7 $f : A \rightarrow B$ es biyectiva $\iff \forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$.

Dem. (Idea - queda como ejercicio desarrollar el argumento formalmente): Observemos que la epiyectividad de f equivale a la existencia de un $x \in A$ tal que $y = f(x)$ para cualquier $y \in B$. Además, la unicidad del tal x equivale a la inyectividad de f . • ¿cuál sería el argumento formal?

4.3 Función inversa

Dada una función $f : A \rightarrow B$, nos gustaría encontrar una función $g : B \rightarrow A$ correspondiente al “camino inverso” de f . Es decir $g(y) = x$ cada vez que $f(x) = y$ • ¿por qué? Es fácil observar que debiéramos al menos pedir que f sea **biyectiva** para que una tal función g exista • ¿por qué?. Si f no fuera biyectiva, habría elementos de B a los cuáles no sabríamos asociarle un elemento de A . Recordando que el grafo de f , G_f , es en realidad un subconjunto de $A \times B$, podemos construir un “candidato” a función g usando su grafo G_g . • ¿Cómo?

Los elementos de $G_g \subseteq B \times A$ serán todos los pares ordenados $(b, a) \in B \times A$ tales que $(a, b) \in G_f$, es decir todos los pares ordenados (b, a) tales que $b = f(a)$. • ¿cómo sería para la función biyectiva l del ejemplo arriba?

Ya vimos que esta construcción • ¿cuál? no siempre hace que g sea función • ¿dónde vimos eso?. Sin embargo, tenemos lo siguiente:

Proposición 4.8 f es biyectiva $\iff g$ es función. **Dem.** En efecto,

$$\begin{aligned} f \text{ es biyectiva} &\iff \forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y \\ &\iff \forall y \in B, \exists! x \in A, (y, x) \in G_g \\ &\iff g \text{ es función.} \end{aligned}$$

(por Proposición 4.7) (por definición de g) (por definición de función)

La transitividad de $\iff$ nos da la conclusión. A la función g que construimos de la manera descrita la llamaremos función inversa. Formalmente:

Definición 4.9 (Función inversa) Dada $f : A \rightarrow B$ biyectiva, se define la función inversa de f , denotada $f^{-1} : B \rightarrow A$, como la función de B en A dada por:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$

• ¿cuál es explícitamente l^{-1} para la función biyectiva del ejemplo arriba? Para una función biyectiva $f : A \rightarrow B$, y su inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$, tenemos las siguientes propiedades:

Proposición 4.10 Si $f : A \rightarrow B$ es función biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ es tal que: (I) $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$. (II) $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$.

Dem. Demostraremos (II). Consideremos $y \in B$ arbitrario. Luego, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ para $(x = f^{-1}(y))$ la primera igualdad y por elección de x y definición de función inversa para la segunda igualdad. • ¿demostración de (I)? ¿puedo comprobar la proposición para l, l^{-1} del ejemplo arriba?

Trabajo de pares (5min). Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.