



Tercera sesión

Lectura 1 (30 min.) Lea el siguiente extracto del apunte, donde las preguntas etiquetadas con • son del tipo de preguntas que usted debe hacerse en su lectura personal del apunte para verificar si está comprendiendo lo que está leyendo. Además, dé sus propios ejemplos sobre: Conjuntos A, B, C tales que $A \times B \subseteq C$.

3.5 Pares ordenados y producto cartesiano

Notemos que los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$ son idénticos. Esto porque, ambos contienen los mismos elementos. Quisiéramos introducir un objeto que distinga el orden de los elementos. • ¿Para qué? La solución no es difícil y viene dada en la siguiente definición.

Definición 3.21 (Par ordenado) *Dados dos elementos a y b en conjuntos de referencia E y F , respectivamente, • ¿Por ejemplo $a = \dots, b = \dots, E = \dots, F = \dots$? se define el par ordenado o 2-tupla de a y b como el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ que se anota (a, b) . Los elementos a y b se llaman, respectivamente, la primera y la segunda coordenada del par ordenado. • ¿Cómo es que distingue el orden de los elementos? ¿qué sería (a, b) y (b, a) en mi ejemplo?*

La propiedad fundamental de los pares ordenados es la siguiente.

Proposición 3.22 Para todo $a, a' \in E$ y $b, b' \in F$ se tiene: $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'$.

• ¿Entiendo la equivalencia? ¿entiendo la igualdad de la izquierda? ¿cómo comprobaría la igualdad de la izquierda sin usar la proposición? ¿tengo claro qué ganamos al demostrar la proposición?

Dem. Haremos la demostración por equivalencia dividida.

$\Leftarrow$) Por hipótesis, $a = a'$ y $b = b'$. Luego, por definición de par ordenado,

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a', b')$$

• ¿dónde se usa definición y dónde la hipótesis?

$\Rightarrow$) Dividimos el análisis en dos casos: Caso $a = b$: En este caso, $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$. Por definición de par ordenado e hipótesis, $\{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a', b') = (a, b) = \{\{a\}\}$. Luego, por definición de igualdad de conjuntos • ¿cuál es esa?, $\{a'\} = \{a', b'\} = \{a\}$. Sigue que $a = a' = b'$. Como $a = b$, se concluye que $a = a'$ y $b = b'$.

- Caso $a \neq b$: Por hipótesis y definición de par ordenado, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. En este caso, $\{a'\} \neq \{a, b\}$, porque a y b no pueden ser simultáneamente iguales a a' • ¿Qué pasaría si lo fueran?. Por lo tanto, se debe tener que $\{a'\} = \{a\}$ y $\{a', b'\} = \{a, b\}$. Por definición de igualdad de conjuntos, sigue que $a = a'$ y $b = b'$, como queríamos establecer.

• ¿Por qué la proposición anterior es la propiedad fundamental de los pares ordenados?

La noción de 2-tupla se puede generalizar para poder especificar un orden entre los elementos de un conjunto de más de 2 elementos dando lugar a la noción de n -tupla en que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ denota una colección ordenada de tamaño n de forma que el i -ésimo elemento, llamado i -ésima coordenada, es a_i • ¿ejemplo de n -tupla con $n = 3, 4$? ¿de 3-ésima coordenada en una 4-tupla?.

Hay varias formas de definir una n -tupla, pero no discutiremos ninguna de ellas • ¿serán muy complicadas o simplemente irrelevantes para nosotros?, salvo para decir que de todas ellas se deduce la propiedad fundamental de una tupla, a saber que dos n -tuplas son iguales si y sólo si son iguales coordenada a coordenada. Formalmente, $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = a'_i$.

Definición 3.23 (Producto cartesiano) Se define el producto cartesiano de $A \subseteq E$ con $B \subseteq F$, denotado $A \times B$, como el conjunto de pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Formalmente,

$$\forall a \in E, \forall b \in F, (a, b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B.$$

En general, se define el producto cartesiano de los conjuntos $A_1, \dots, A_n$, $A_i \subseteq E_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, denotado $A_1 \times \dots \times A_n$, por

$$\forall a_1 \in E_1, \dots, \forall a_n \in E_n, (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in A_i$$

• ¿Entiendo la definición formal? ¿qué símbolos son los nuevos y cuáles los conocidos que se usan para definir los nuevos?

Ejemplo: El plano cartesiano es, formalmente, el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{a, b, c\}$ entonces

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}, \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}. \end{aligned}$$

En particular, $A \times B \neq B \times A$. • ¿por qué? Es decir, $\times$ no conmuta. A menudo resulta conveniente representar/visualizar conceptos matemáticos pues esto ayuda a asimilarlos y manipularlos. En particular, hay una representación muy útil del producto cartesiano que está motivada por instancias en que A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, y por lo tanto $A \times B$ corresponde a una región del plano cartesiano. En la Figura 9 se muestran dos ejemplos. Estos ejemplos motivan a pensar en el producto cartesiano $A \times B$ como un rectángulo de lados paralelos a los ejes cartesianos. Esto es una abstracción • ¿qué significa “abstracción”? , pues es discutible que los ejemplos de la Figura 10 parezcan rectángulos. No obstante, en seguida tendremos la oportunidad de comprobar la utilidad de esta representación.

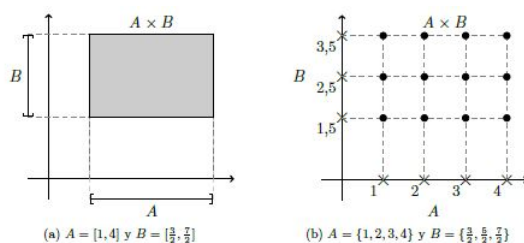


Figura 9: Representaciones de $A \times B$ para distintos $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Los elementos de $A \times B$ se representan por áreas sombreadas (izquierda) o puntos (derecha).

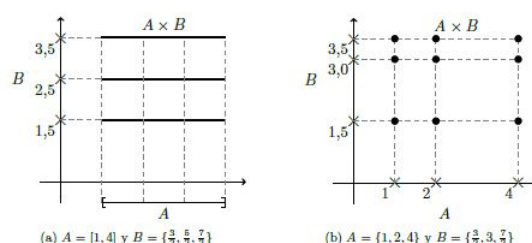


Figura 10: Ejemplos adicionales de representaciones de $A \times B$. Los elementos de $A \times B$ se representan por segmentos de recta (izquierda) o puntos (derecha).

A continuación, establecemos algunas de las propiedades del producto cartesiano.

Proposición 3.24 Si $A, A' \subseteq E$ y $B, B' \subseteq F$, entonces

(I) $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$.

(II) $A \subseteq A' \wedge B \subseteq B' \implies A \times B \subseteq A' \times B'$.

$$(III) (A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

$$(IV) (A \times B) \cup (A' \times B') \subseteq (A \cup A') \times (B \cup B').$$

• ¿Entiendo la proposición de manera intuitiva? ¿puedo apoyarme de la representación en “rectángulos” para entender las propiedades? ¿qué pasa si $A = \dots$, $B = \dots$, etc.? ¿qué utilidad tiene esta proposición? ¿en (II) se tendrá la equivalencia? ¿en (IV) se tendrá la igualdad?

Dem. (de la Proposición 3.24): Demostraremos las partes (II) y (III). Veamos que se cumple (II). Por hipótesis tenemos que $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$. Debemos probar que $A \times B \subseteq A' \times B'$. Notar que si $a \in E$ y $b \in F$ son arbitrarios • ¿qué significa “arbitrarios”? , entonces

$$\begin{aligned} (a, b) \in A \times B &\iff a \in A \wedge b \in B && \text{(definición de } \times \text{)} \\ &\iff a \in A' \wedge b \in B' && \text{(hipótesis y definición de } \subseteq \text{)} \\ &\iff (a, b) \in A' \times B'. && \text{(definición de } \times \text{)} \end{aligned}$$

Como a y b son arbitrarios, de la transitividad de $\iff$ y de la definición de $\times$ sigue que $A \times B \subseteq A' \times B'$.

Veamos que se cumple (III), Sea $(a, b) \in E \times F$ arbitrario. Notar que

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A \times B) \cap (A' \times B') &\iff (a, b) \in (A \times B) \wedge (a, b) \in (A' \times B') && \text{(definición de } \cap \text{)} \\ &\iff a \in A \wedge b \in B \wedge a \in A' \wedge b \in B' && \text{(definición de } \times \text{ y asociatividad del } \wedge \text{)} \\ &\iff a \in A \cap A' \wedge b \in B \cap B' && \text{(conmutatividad de } \wedge \text{ y definición de } \cap \text{)} \\ &\iff (a, b) \in (A \cap A') \times (B \cap B'). && \text{(definición de } \times \text{)} \end{aligned}$$

Como (a, b) es arbitrario, de la transitividad de $\iff$ y de la definición de $\times$ sigue que se tiene la igualdad del enunciado. $\square$ • ¿cómo demuestro (I) y (IV)?

Queda como ejercicio probar las siguientes propiedades: **Proposición 3.25** Sean $A, A' \subseteq E$ y $B, B' \subseteq F$. (I) $(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B)$ y $A \times (B \cup B') = (A \times B) \cup (A \times B')$. (II) $(A \cap A') \times B = (A \times B) \cap (A' \times B)$ y $A \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A \times B')$. • ¿cómo lo demuestro? ¿habrá propiedades similares para el complemento/diferencia/diferencia simétrica de productos cartesianos?

Trabajo de pares (5 min.) Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

Lectura 2 (30 min.) En esta lectura, dé ejemplos de particiones de un conjunto a su elección y del plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3.6 Conjunto potencia y partición de conjuntos

A continuación describiremos una importante forma de construir conjuntos a partir de conjuntos existentes. Como ya es costumbre, asumiremos que hay un conjunto de referencia E en el que nos encontramos trabajando. • ¿Cuáles E puedo tener en mente?

Definición 3.26 (Conjunto potencia) Llamamos *conjunto potencia* de A (o *partes* de A), denotado $\mathcal{P}(A)$, al conjunto de todos los subconjuntos de A . Entonces $\mathcal{P}(A)$ queda determinado por:

$$C \in \mathcal{P}(A) \iff (\forall x \in E, x \in C \Rightarrow x \in A)$$

o equivalentemente,

$$C \in \mathcal{P}(A) \iff C \subseteq A$$

• ¿Entiendo la definición? ¿Puedo dar un ejemplo de A y $C \in \mathcal{P}(A)$? Note que siempre $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$. En particular, $\mathcal{P}(A)$ nunca es vacío. **Ejemplo:**

- Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

- Suponga ahora que $A = \emptyset$. ¿Cuáles son los subconjuntos de $\emptyset$? Solamente el mismo $\emptyset$. Luego $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Note que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ pues el primer conjunto no tiene ningún elemento mientras que el segundo tiene un elemento. En efecto: $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Calculemos ahora $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$. Obviamente, un conjunto de un solo elemento tiene solamente como subconjuntos los triviales: al vacío y a él mismo. O sea $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. El lector debe ser capaz ahora de calcular $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. • ¿cómo sería? Note que este proceso puede no detenerse nunca. ¡Y lo que estamos generando es una infinidad de conjuntos! • ¿hay algún patrón? ¿cuántos elementos tendrá cada conjunto formado de esta manera?

Proposición 3.27 (I) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. (II) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$. • ¿Entiendo la proposición intuitivamente? ¿me hace sentido? **Dem.** (I) Sea $X \subseteq E$ arbitrario. Notar que

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\iff X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) && \text{(definición de } \cup) \\ &\iff X \subseteq A \vee X \subseteq B && \text{(definición conjunto potencia)} \\ &\implies X \subseteq A \cup B && \text{(porque } A, B \subseteq A \cup B) \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A \cup B). && \text{(definición conjunto potencia)} \end{aligned}$$

Como X es arbitrario, de la transitividad de $\implies$ y de la definición de inclusión de conjuntos se concluye que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. • ¿es equivalencia la única implicancia que aparece en la demostración? ¿si no es así, puedo dar un contraejemplo? (II) Sea $X \subseteq E$ arbitrario. Notar

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) && \text{(definición de } \cap) \\ &\iff X \subseteq A \wedge X \subseteq B && \text{(definición de conjunto potencia)} \\ &\iff X \subseteq A \cap B && \text{(Corolario 3.11 parte (I) y (II))} \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A \cap B) && \text{(definición de conjunto potencia)} \end{aligned}$$

• ¿cuál será el corolario 3.11? Como X es arbitrario, de la transitividad de $\iff$ y de la definición de igualdad de conjuntos se concluye que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Es importante resaltar que un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(A)$ tiene como elementos a subconjuntos de A . Formalmente, si $X \in \mathcal{C}$, entonces $X \subseteq A$. • ¿entiendo esto? ¿cómo sería un $\mathcal{C}$ para $A = \dots$ y $\mathcal{P}(A) = \dots$? Algunos subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$, llamados particiones de A , son particularmente interesantes por, como veremos en un par de semanas, estar en correspondencia con clasificaciones de los elementos de A . • ¿clasificaciones? ¿cómo clasificamos los elementos de un conjunto?

Definición 3.28 (Partición de conjuntos) Se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es partición de A si las siguientes tres condiciones se cumplen:

■ $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$.

■ Los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos de a pares, es decir, $\forall C, C' \in \mathcal{C}$, si $C \neq C'$, entonces $C \cap C' = \emptyset$.

■ $\mathcal{C}$ cubre A , es decir, $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$.

Los elementos de $\mathcal{C}$ se denominan **partes**. • ¿qué tiene que ver la definición con clasificación? ¿me hacen sentido las 3 condiciones?

Ejemplo: - Sean $\mathbb{P}\text{ar}$ e $\mathbb{I}\text{mp}$ los conjuntos de enteros pares e impares, respectivamente. Notar que $\{\mathbb{P}\text{ar}, \mathbb{I}\text{mp}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$. • ¿por qué? - El conjunto $A = \{x, y, z\}$ tiene 5 particiones distintas, • ¿hay alguna que encuentre más útil que otra? a saber,

$$\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}, \quad \{\{x, y\}, \{z\}\}, \quad \{\{x, z\}, \{y\}\}, \quad \{\{x\}, \{y, z\}\}, \quad \{\{x, y, z\}\}$$

Trabajo de pares (5min). Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.