Ejercicio (PAUTA).

a) (3 ptos.) Demuestre usando el principio de inducción que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 1,\, 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Demostración. Definamos $P(n) : 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Caso base: $P(1) : 1 = 1^2$ es verdadera. **(1 pto.)** Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(n-1) : 1 + 3 + \cdots + 2(n-1) - 1 = (n-1)^2$ es verdadera (H.I.) Queremos demostrar que $P(n)$ es verdadera. Veamos,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + 2(n-1) - 1 + 2n - 1 &\overset{H.I.}{=} (n-1)^2 + 2n - 1 \ \textbf{(1.5 ptos.)} \\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2, \end{aligned}$$

Por lo tanto, por axioma de inducción, se tiene que $\forall n \geq 1, P(n)$ es verdadera. **(0.5 ptos.)**

b) Sean $P(x) : \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4n + 3$ y $Q(x) : \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2n + 1$. Defina los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, P(x)\},\, B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, Q(x)\}.$$

b.1) **(1 pto.)** Decida si los números $-1, 0, 1, 3$ pertenecen a $A \cap B$.

Solución. un número entero x está en $A \cap B$ si y solo si la proposición $P(x) \wedge Q(x)$ es verdadera. Esto equivale a que existan $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x = 4n + 3 \wedge x = 2n + 1$ **(0.2 ptos)**. Por lo tanto, $-1 = 4(-1) + 3 = 2(-1) + 1 \in A \cap B$ **(0.2 ptos.).** 0 es par, luego no está en A, menos en $A \cap B$ **(0.2 ptos.)**. $1 \notin A$ pues $1 = 4n + 3 \Leftrightarrow -2 = 4n \Leftrightarrow -1 = 2n \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ lo que no ocurre **(0.2 ptos.)**. Finalmente, $3 = 4 \cdot 0 + 3 = 2 \cdot 1 + 1 \in A \cap B$ **(0.2 ptos.)**.

b.2) **(2 ptos.)** Demuestre que $A \subseteq B$. [**Ayuda:** $4n + 3 = 4n + 2 + 1$.]

Demostración. Sea $x \in A$. Luego, existe un entero n tal que $x = 4n + 3$. Usando la ayuda, se tiene que $x = 4n + 2 + 1 = 2(2n + 1) + 1$ **(1 pto.)**, y como n es entero, $2n + 1$ también lo es **(0.5 ptos.)**. Por lo tanto $x = 2m + 1$, $m = 2n + 1 \in \mathbb{Z}$, es decir, $x \in B$. **(0.5 ptos.)**