

Ejercicio (PAUTA)

Considere la función proposicional de dos variables $P(x, y) : x \cdot y < 1$ para $x, y \in \mathbb{R}$ y la función proposicional de una variable $Q(x) : \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$.

a) (2 ptos.) Determine el valor de verdad de $P(1, -1)$, $P(1, 1)$, y $P(1, 0)$.

b) (2 ptos.) Escriba la negación y determine el valor de verdad de la siguiente proposición

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x).$$

c) (2 ptos.) Cambie $\mathbb{R}$ por otro conjunto de referencia para la función proposicional $P(x, y)$ de modo que la proposición de la parte b) cambie su valor de verdad.

Solución.

a) $P(1, -1) : 1 \cdot (-1) < 1$ es verdadera pues $-1 < 1$ es verdadera (0,6 ptos.), $P(1, 1) : 1 \cdot 1 < 1$ es falsa pues $1 < 1$ es falsa (0,6 ptos.) y $P(1, 0) : 1 \cdot 0 < 1$ es verdadera pues $0 < 1$ es verdadera (0,7 ptos.)

b) La negación es $\exists x \in \mathbb{R}, \overline{Q(x)}$, donde $\overline{Q(x)} : \forall y \in \mathbb{R}, \overline{P(x, y)}$, con $\overline{P(x, y)} : x \cdot y \geq 1$. Así, la negación de la proposición es

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y \geq 1.$$

(1 pto.) La proposición original es verdadera pues, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, x \cdot 0 < 1$. (1 pto.)

c) Si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposición es falsa (1 pto.) pues $x = 1$ es un contraejemplo ya que $1 \cdot y \geq 1$, para todo $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (1 pto.)