Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Lab de Introducción al Álgebra. Primavera 2024.

# Segunda sesión

**Lectura 1 (10 min.)** Lea el siguiente extracto del apunte, donde las preguntas etiquetadas con • son del tipo de preguntas que usted debe hacerse en su lectura personal del apunte para verificar si está comprendiendo lo que está leyendo.

## 2.1 Introducción

Dados dos números enteros $n$ y $m$, otra forma para decir que $n$ es un factor de $m$ es decir que $n$ divide a $m$ o que $m$ es divisible por $n$. • ¿Cómo sería para, por ejemplo, $n = 2$ y $m = 6$? Además, un número que sólo es divisible por 1 y por sí mismo se llama número primo. En otro caso se llama número compuesto. Es decir, para $n \geq 2$ :

$$n \text{ es compuesto } \iff (\exists d \in \{2, \ldots, n-1\}, d \text{ divide a } n)$$

• ¿Me es evidente la equivalencia? ¿La podría demostrar?

Dos números que no tienen divisores comunes se llaman primos relativos o coprimos. • ¿Puedo dar un ejemplo? Una categoría importante de proposiciones y teoremas involucra propiedades de los números naturales, es decir, de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. • ¿Lo creo por ahora? ¿Conozco alguna proposición o teorema que involucre propiedades de los naturales? Notar que, a diferencia de lo que habitualmente se usa en la enseñanza preuniversitaria, la proposición $0 \in \mathbb{N}$ es verdadera. • ¿Por qué? Si retiramos 0 de $\mathbb{N}$ obtenemos el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ejemplos de proposiciones acerca de números naturales son:

- $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$. • ¿Por qué es una proposición?
- $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7. • ¿Por qué es una proposición?

En general, si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ es una función proposicional con conjunto de referencia los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq n_0$, • ¿Tengo claro qué es una función proposicional y qué es un conjunto dereferencia para ella? el **Principio de inducción** nos proporciona una proposición equivalente a aquella que afirma que para cada $n \geq n_0$ la proposición $P(n)$ es verdadera. • ¿Cuál es la gracia de tener una proposición equivalente a cierta proposición? Esta proposición se escribirá $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies P(n)$, adoptando la convención que un predicado evaluado fuera de su conjunto de referencia da como resultado la proposición $F$. • ¿Qué es un predicado? ¿Cómo se evaluaría fuera de su conjunto de referencia? ¿Por qué asumimos que es $F$? ¿Ejemplo?

**Axioma 2.1 (Principio de inducción)** Si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ es un predicado en el conjunto de referencia de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq n_0$, entonces

$$[\underbrace{P(n_0)}_{\text{caso base}} \wedge (\forall n \geq n_0 + 1, \underbrace{P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(n-1)}_{\text{Hipótesis Inductiva (H.I.)}} \Rightarrow P(n))] \iff (\forall n \geq n_0, P(n))$$

• ¿Cuál es el axioma exactamente? ¿Entiendo bien ambos lados de la equivalencia? ¿el caso base? ¿la hipótesis inductiva? ¿Cuál es la ventaja del lado izquierdo sobre el derecho de la equivalencia? ¿Ejemplo de predicado $P(n)$ con conjunto de referencia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$? ¿Cómo se ve para mi ejemplo la equivalencia? ¿para demostrar una proposición del tipo $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ la única forma es usando el principio de inducción? de no ser así, ¿cuál es la potencial ventaja sobre otros métodos?

**Ejemplo:** Usemos el Principio de inducción para demostrar que

$$\forall n \geq 1, \underbrace{1+2+\ldots+n=\frac{1}{2} n(n+1)}_{P(n)}$$

El caso base $P\left(n_0\right)$ a demostrar en esta ocasión es con $n_0=1$. Aquí, tenemos que demostrar que $1=\frac{1}{2}(1+1)$, lo que es trivialmente cierto. Sea $n \geq 2$. Supongamos ahora que la propiedad vale para $1,2, \ldots, n-1$, es decir, que se cumplen $P(1), P(2), \ldots, P(n-1)$ (H.I.). Debemos demostrar que la propiedad también es cierta para $n$. Es decir, que

$$1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{1}{2} n(n+1). \text{ En efecto,}$$

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+(n-1)+n & =(1+2+\ldots+(n-1))+n \\
& =\frac{1}{2}(n-1) n+n \quad \text{(Porque se tiene } P(n-1) \text{ por H.I.)} \\
& =\frac{1}{2}((n-1) n+2 n) \\
& =\frac{1}{2} n(n+1)
\end{aligned}$$

Usando que $=$ es transitiva concluimos que se tiene $P(n)$. Gracias al Principio de inducción, concluimos que $(\forall n \geq 1, P(n))$. • ¿Por qué es necesaria esta última frase? ¿no se había concluido en la primera frase $P(n)$es verdadera?

El lector habrá notado que en los ejemplos anteriores para establecer que $P(n)$ es verdadera, no se usó que $P\left(n_0\right), P\left(n_0+1\right), \ldots, P(n-1)$ eran todas verdaderas, sino algo más débil que se deriva • ¿cómo? de la hipótesis inductiva; a saber, que $P(n-1)$ es verdadera. En ciertas situaciones (como en el ejemplo que sigue) es crucial que, por hipótesis inductiva, se tenga que $P\left(n_0\right), P\left(n_0+1\right), \ldots, P(n-1)$ sean todas verdaderas. Para resaltar este tipo de situaciones a veces uno se refiere a ellas por "inducción fuerte". • ¿me hace sentido el adjetivo "fuerte"?

**Ejemplo (de inducción fuerte):** Probaremos el siguiente resultado por inducción: Todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, posee al menos un divisor que es un número primo. Es decir, $\forall n \geq 2, \exists p \in \mathbb{N}$ primo tal que $p$ divide a $n$. • ¿cuál sería $P(n)$? El caso base es con $n_0=2$, para el cual observamos que $p=2$ es primo y divide a 2 . Sea $n \geq 3$, y supongamos ahora que para todo valor $k=2,3, \ldots, n-1$ se tiene que $k$ posee un divisor que es primo (H.I.). • ¿podría haber avanzado la demostración hasta aquí? ¿qué haría yo ahora? Separamos por casos:
- Caso $n$ es primo: Entonces $p=n$ es un número primo tal que $p$ divide a $n$.
- Caso $n$ no es primo: Entonces existe $d \in\{2, \ldots, n-1\}$ tal que $d$ divide a $n$. Por hipótesis inductiva y notando que $d \leq n-1$, debe existir un número primo $p$ que divide a $d$. • ¿cómo se usó la hipótesis inductiva exactamente? Tenemos entonces que $p$ divide a $d$ y $d$ divide a $n$. Sigue que $p$ divide a $n$. • ¿por qué no se concluye con una frase como la del ejemplo anterior?

**Trabajo de pares (5 min.)** Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

**Ejemplo (5 min.)** Escriba al menos un ejemplo de función proposicional con conjunto de referencia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, la correspondiente proposición cuantificando la variable usando "$\forall$" y su negación.

**Lectura 2 (10 min.)**

### 3.1 Introducción

En la Lógica Proposicional • ¿cuál era esa? aceptamos que $x \in E$ es una proposición que es verdadera cuando $x$ es un elemento del conjunto $E$ y falsa cuando no lo es. • ¿ejemplo? En la Lógica de Primer Orden • ¿cuál era esa? se vió la noción de predicado como una expresión que depende de variables que al ser reemplazadas por elementos de un conjunto de referencia lo transforman en una proposición. En ambos casos, el uso que le dimos a las palabras conjunto y elemento fue el de la noción intuitiva que tenemos de ellos: un conjunto es una colección de cosas, sus elementos. Sorprendentemente, no es fácil definir de manera rigurosa la noción de conjunto. De hecho, la importancia de tener una noción formal fue aceptada recién a fines de los 1800 's, cuando nace la teoría axiomática de conjuntos. Aquí no veremos esta teoría y seguiremos usando la noción intuitiva. • ¿por qué se necesitará una teoría axiomática? ¿se necesitará en algún curso futuro del plan común? Lo que sí se verá en detalle es cómo obtener nuevos conjuntos a partir de otros dados o conocidos (como los reales $\mathbb{R}$, los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, etc.). Partamos discutiendo la definición de un conjunto en términos de un predicado. Dado un predicado $P(x)$ sobre un conjunto de referencia $E$, podemos construir un nuevo conjunto $A$ indicando que sus elementos son aquellos $e \in E$ para los cuales se tiene $P(e)$. • ¿que quiere decir que se tenga $P(e)$? Es decir, $\forall x \in E, x \in A \iff P(x)$ • ¿qué significa esto? lo que a menudo también denotamos $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ • ¿cómo se lee esto? ¿qué significan los símbolos $\{\}$ y $|$? , donde hemos usado la convención que consiste en denotar la función proposicional "$x$ pertenece a $A$" por "$x \in A$" (y cuya negación, el lector recordará, denotamos "$x \notin A$ "). Otra forma de escribir un conjunto es listar sus elementos (cuando esto es posible). Por ejemplo, $A = \{a\}, B = \{a, b\}$.
**Ejemplo:** - El intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- El conjunto de múltiplos de 7 es el conjunto $\left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{7}x \in \mathbb{N}\right\}$.
- Los racionales $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \land x = \frac{p}{q}\right\}$ y los irracionales $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$.

**Diagramas de Venn** Un Diagrama de Venn es una ilustración que muestra la relación matemática o lógica entre conjuntos y/o entre conjuntos y sus elementos (ver Figura 2). Cumplen el rol de ayudarnos a desarrollar una intuición frente al concepto de conjunto y a las relaciones entre estos. Sin embargo, no podemos usarlos para demostrar propiedades, ni para sacar conclusiones generales (que se apliquen a todo conjunto). • ¿por qué no se puede demostrar con diagramas? ¿por qué son círculos y no otra figura?

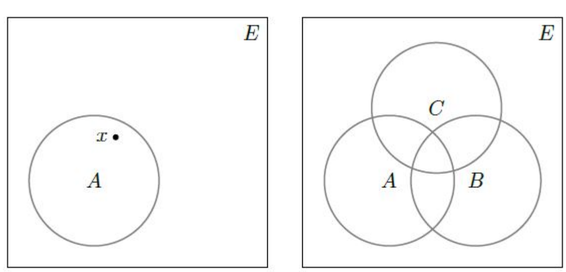


Figura 2: Diagramas de Venn. El de la izquierda representa al conjunto $A$ y la relación de pertenencia $x \in A$. El de la derecha, representa a los conjuntos $A$, $B$, y $C$.

**Conjunto de referencia** Como ya adelantamos, asumiremos la existencia de un conjunto de referencia que usualmente denotaremos $E$ y al que pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Formalmente, $E$ es tal que la función proposicional $e \in E$ • ¿por qué es función proposicional y no proposición? es siempre verdadera o dicho de otra forma la proposición

$\forall x \in E, x \in E$, es verdadera. En ocasiones, el conjunto de referencia será uno conocido, como $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, etc.

**Definición 3.1 (Conjunto vacío)** *El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es un conjunto que no tiene elementos, es decir, cumple que cualquiera que sea el conjunto de referencia $E$* se tiene $\forall x \in E, x \in \emptyset \iff F$.• ¿entiendo la proposición anterior? ¿para qué definir un conjunto sin elementos?

### 3.3 Relaciones entre conjuntos

Primero, especificamos cuándo consideramos que dos conjuntos son iguales. • ¿por qué es importante especificar eso?

**Definición 3.2 (Igualdad)** Se dice que los conjuntos $A$ y $B$ son iguales, denotado $A = B$, si $A$ y $B$ tienen los mismos elementos. Es decir, $A = B \iff (\forall x \in E, x \in A \iff x \in B)$. • o sea que para demostrar que dos conjuntos son iguales ¿tengo que demostrar que una equivalencia lógica es cierta? ¿cuándo necesitamos justificar que dos conjuntos son iguales?

Notar que de la definición sigue que $\{a, a\} = \{a\}$. En particular, si $A = \{a, b\}$ se tiene que $a = b$ si y sólo si $\{a, b\} = \{a\}$. • ¿por qué?

**Definición 3.3 (Inclusión)** *Se dice que $A$ es subconjunto de $B$ (o que $A$ está contenido en $B$, o que $A$ esta incluido en $B$ ), denotado $A \subseteq B$, si todos los elementos de $A$ están también en $B$. Es decir, $A \subseteq B \iff (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$.* • ¿para justificar que $A \subseteq B$ debo demostrar una implicancia? ¿cómo es esa implicancia si $A$ y $B$ son conjuntos definidos usando predicados? ¿puedo hacer un diagrama de Venn para esta relación entre conjuntos? ¿ejemplo?

### 3.4 Álgebra de conjuntos.

A partir de conjuntos conocidos se pueden definir nuevos conjuntos. A continuación ilustraremos varias formas de hacerlo. Nuevamente, $A, B, C$ denotan subconjuntos de $E$.

**Unión e intersección de conjuntos**

**Definición 3.7 (Unión)** *La unión de $A$ y $B$, denotada $A \cup B$, es el conjunto que reúne a los elementos que están en al menos uno de los dos conjuntos $A$ o $B$. Formalmente,*

$$\forall x \in E, x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

• ¿o sea que para verificar que un elemento está en la unión de dos conjuntos debo verificar que una proposición del tipo $p \vee q$ es verdadera? ¿cómo se representa mediante un diagrama de Venn? ¿ejemplo?

**Definición 3.8 (Intersección)** *La intersección de $A$ y $B$, denotada $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que están tanto en $A$ como en $B$. Formalmente,*

$$\forall x \in E, x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

• ¿o sea que para verificar que un elemento está en la intersección de dos conjuntos debo verificar que una proposición del tipo $p \wedge q$ es verdadera? ¿cómo se representa mediante un diagrama de Venn? ¿ejemplo?

**Proposición 3.9** $X \subseteq Y \wedge W \subseteq Z \implies X \cap W \subseteq Y \cap Z \wedge X \cup W \subseteq Y \cup Z$.

• ¿me hace sentido la propiedad? ¿como empezaría una demostración? ¿cómo se ve con diagramas de Venn? ¿cómo funciona en el caso particular $X = .., Y = .., W = .., Z = ..$?

**Trabajo de pares (5min).** Explique con sus propias palabras lo que entendió de la lectura.

**Ejemplo (5 min.)** Escriba al menos un ejemplo de dos conjuntos $A$ y $B$ definidos usando un conjunto de referencia $E$ y un predicado o función proposicional, tales que $A \subseteq B$.